

BARKODI



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
 MINISTRIA E ARSIMIT
 DHE SPORTIT
 AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

PROVIMI I MATURËS SHTETËRORE 2014

I DETYRUAR

VARIANTI A

E hënë, 09 qershor 2014

Ora 10.00

Lënda: MATEMATIKË (GJIMNAZI)

Udhëzime për nxënësin

Testi në total ka **25 pyetje**, 13 pyetje me zgjedhje (alternativa) dhe 12 pyetje me zhvillim. Në pyetjet me zgjedhje rrethoni **vetëm** shkronjën përbri përgjigjes së saktë, ndërsa për pyetjet me zhvillim është dhënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen. Koha për zhvillimin e pyetjeve të testit është **2 orë e 30 minuta**. Pikët për secilën kërkesë janë dhënë përbri saj.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Kërkesa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pikët										
Kërkesa	11	12	13	14	15a	15b	16	17	18	19a
Pikët										
Kërkesa	19b	20	21a	21b	22	23a	23b	24	25	
Pikët										

Totali i pikëve

KOMISIONI I VLERËSIMIT

1.....Anëtar

2.....Anëtar

Për pyetjet 1 - 13 rrethoni vetëm shkronjën që i përgjigjet alternativës së saktë.

1. Vlera e shprehjes $\log_3 9$ është: 1 pikë
- A) -3
 B) -2
 C) 2
 D) 3
2. Vlera e $x^{\frac{1}{2}}$ për $x=9$ është: 1 pikë
- A) 9
 B) 3
 C) 1
 D) 3^{-1}
3. Vlera më e madhe e funksionit $y=\sqrt{3-\cos x}$ është: 1 pikë
- A) 4
 B) $\sqrt{3}$
 C) $\sqrt{2}$
 D) 2
4. Bashkësia $A=\{x \in R / x \leq 0\}$ shkruhet ndryshe: 1 pikë
- A) $]-\infty; 0]$
 B) $]0; +\infty[$
 C) $]-\infty; 0[$
 D) $[0; +\infty]$
5. Diagonalet e një rombi janë 6cm dhe 8cm. Perimetri i tij (në cm) është: 1 pikë
- A) 48
 B) 20
 C) 16
 D) 10
6. Pika O është mesi i segmentit AB. Që barazimi $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AO}$ të jetë i vërtetë, vlera e k duhet të jetë: 1 pikë
- A) -2
 B) -1
 C) $-\frac{1}{2}$
 D) 2
7. Këndi α është i tillë që $\sin \alpha < 0$ dhe $\cos \alpha > 0$. Këndi α është i kuadrantit: 1 pikë
- A) I
 B) II
 C) III
 D) IV

8. Numri i vlerave të palejueshme të x -it në shprehjen $\frac{x+1}{x^2-9}$ është: 1 pikë
- A) 3
 B) 2
 C) 1
 D) 0
9. Jepet funksioni $y=1+x^2$. Cila nga pikat e mëposhtme ndodhet në grafikun e tij? 1 pikë
- A) (1;1)
 B) (1;0)
 C) (0;1)
 D) (0; -1)
10. Në progresionin aritmetik me diferencë 2 dhe kufizë të dytë 5, kufiza e 5-të është: 1 pikë
- A) 15
 B) 13
 C) 11
 D) 9
11. Pika $A(x;-3)$ është pikë e drejtëzës $2x-3y+1=0$. Vlera e x është: 1 pikë
- A) -5
 B) -3
 C) -2
 D) -1
12. Jepet parabola $y=x^2-2x+4$. Kulmi i saj është pika me abshisë: 1 pikë
- A) 2
 B) -2
 C) -1
 D) 1
13. Vlera e $\int_{-1}^1 x dx$ është: 1 pikë
- A) -1
 B) 0
 C) $\frac{1}{2}$
 D) 2

Pyetjet 14 – 25 janë me zgjidhje dhe arsytim.

14. Mesatarja e 4 numrave çift të njëpasnjëshëm është 7. Gjeni numrin më të madh. 2 pikë

Shënojmë me x numrin çift më të vogël.

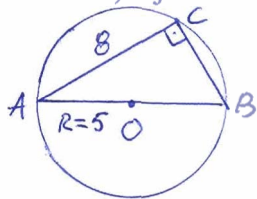
Numrat janë $x; x+2; x+4; x+6$.

$$m = \frac{x+x+2+x+4+x+6}{4} = 7 \Rightarrow 4x+12=28 \Rightarrow 4x=16 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

Numri më i madh është 10.

15. Në rrethin me diametër AB merret një pikë C e tillë që AC=8cm.

a) Gjeni CB nëse rrezja e rrethit është 5cm.



2 pikë
 Dimë se: këndi nëthor që mbështetet mbi diametër e ka masën 90° . Pra $m(\hat{ACB}) = 90^\circ$, d.m.th. ΔABC është kënddrejtë në C. Zbatojmë Teoremën e Pitagorës:
 $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = AB^2 - AC^2 \Rightarrow BC^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$
 $BC^2 = 36 \Rightarrow \boxed{BC = 6 \text{ cm}}$

b) Gjeni sinusin e këndit më të vogël të trekëndëshit ABC

1 pikë
 Në çdo trekëndësh: Përballë brinjës më të vogël ndodhet këndi më i vogël. $\sin \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ $\boxed{\sin \hat{A} = \frac{3}{5}}$

16. Për ç'vlera të parametrin m trinomi $-x^2 + 3x + (m-1)$ merr vlera negative, për çdo $x \in R$. 3 pikë

Trinomi i fuqisë së dytë merr kudo shenjen e a-së vetëm kur dallori është negativ. Atëherë $\Delta = b^2 - 4ac$, $a = -1$, $b = 3$, $c = m-1$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (m-1) \Rightarrow \Delta = 9 + 4m - 4 \Rightarrow \Delta = 4m + 5$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4m + 5 < 0 \Rightarrow 4m < -5 \Rightarrow m < -\frac{5}{4}$$

Për $m \in]-\infty; -\frac{5}{4}[$ trinomi merr vetëm vlera negative.

17. Jepet funksioni $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{për } x < 2 \\ 2m & \text{për } x \geq 2 \end{cases}$

Për cilat vlera të m funksioni është i vazhdueshëm në pikën $x=2$.

3 pikë

Që funksioni të jetë i vazhdueshëm në pikën $x=2$, duhet të plotësohen njëkohësisht tri kushte:

1 - të jetë i përcaktuar në $x=2$

2 - $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

3 - $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

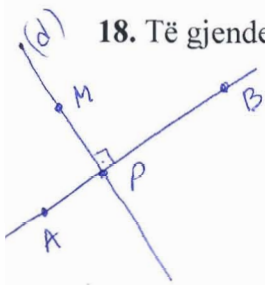
Njehsojmë: 1 - $f(2) = 2m$

2 - $\lim_{\substack{x \rightarrow 2^- \\ x < 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \stackrel{f.p. \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + 2 = 2 + 2 = 4$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 2^+ \\ x > 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2m = 2m$

3 - $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow \boxed{m = 2}$

Pra funksioni është i vazhdueshëm për $m = 2$



18. Të gjendet projektioni i pikës M (-5;1) në drejtëzën që kalon nga pikat A(0;-4) dhe B(3;2). 3 pikë

Për të gjetur projektionin e pikës M në drejtëzën (AB):

Së pari: Gjejmë ekuacionin e drejtëzës (AB).

$$(AB) : \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} \Rightarrow \frac{x-0}{3-0} = \frac{y-(-4)}{2-(-4)} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y+4}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y+4}{2} \Rightarrow 2x = y+4 \Rightarrow (AB) : \boxed{2x - y - 4 = 0}$$

Së dyti: Gjejmë ekuacionin e drejtëzës që kalon nga pikë M dhe është pingul me drejtëzën (AB).

Drejtëza (d) ka trajtën: $x + 2y + c = 0$

Megjithatë pikë M (-5;1) ndodhet në (d) kemi: $-5 + 2 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 3}$

Ekuacioni i drejtëzës (d) është: $\boxed{x + 2y + 3 = 0}$

Së treti: Projektioni i pikës M mbi drejtëzën (AB) është pikëprerja e drejtëzave (AB) dhe (d). Zgjidhim sistemin

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x + 2(2x - 4) + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x + 4x - 8 + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ 5x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Projektioni i pikës M mbi drejtëzën (AB) është: $P(1; -2)$

19. Jepet elipsi me boshte 10 dhe 8.

a) Shkruani ekuacionin e elipsit dhe gjeni largesën midis vatrave.

2 pikë

Ekuacioni i elipsit ka trajtën: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Kemi: $2a = 10 \Rightarrow \boxed{a = 5}$; $2b = 8 \Rightarrow \boxed{b = 4}$

Ekuacioni i elipsit është: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 16 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow \boxed{c = 3}$

Largesja midis vatrave të elipsit është $\boxed{2c = 6}$

b) Shkruani ekuacionin e tangjenteve ndaj elipsit, paralele me drejtëzën $x + y = 0$.

2 pikë

Megjithatë tangjentja ndaj elipsit është paralele me (d): $y = -x$ atëherë $k_{tj} = k_d = -1$. Pra tangjentja ka trajtën: $y = -x + t$

Ekuacioni i tangjencës së (d): $y = kx + t$ me elipsin $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ është

$$a^2 k^2 + b^2 = t^2 \Rightarrow 25 \cdot (-1)^2 + 16 = t^2 \Rightarrow t^2 = 41 \Rightarrow t = \pm \sqrt{41}$$

Ekuacionet e tangjenteve janë: $y = -x + \sqrt{41}$
 $y = -x - \sqrt{41}$

20. Gjeni derivatin e funksionit $y=x^3+\sin 2x$ në pikën $x=0$.

2 pikë

$$f'(x) = (x^3 + \sin 2x)' = (x^3)' + (\sin 2x)' = 3x^2 + \cos 2x \cdot (2x)' = 3x^2 + 2 \cdot \cos 2x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \cdot \cos 2x$$

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot \cos(2 \cdot 0) = 0 + 2 \cdot \cos 0 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f'(0) = 2$$

21. Jepet funksioni $y=3+12x-x^3$.

a) Studioni monotoninë e funksionit.

2 pikë

Gjejmë derivatin e parë dhe studiojmë shenjë e tij:

$$f'(x) = (3 + 12x - x^3)' = 12 - 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Ndërtojmë tabelën e shenjave

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		\searrow	\nearrow	\searrow	
		min	max		

për $x \in]-\infty; -2[$ funksioni është zbritës
 për $x \in]-2; 2[$ funksioni është rritës
 për $x \in]2; +\infty[$ funksioni është zbritës

b) Gjeni ekuacionin e tangjentes së hequr në pikën ku grafiku pret boshtin OY.

3 pikë

grafiku pret boshtin (OY) e ka abshisën $x=0$

Ekuacioni i tangjentes ka trajtën: $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$f(0) = 3$$

$$f'(0) = 12 - 3 \cdot 0^2 = 12$$

Ekuacioni i tangjentes është: $y - 3 = 12(x - 0)$

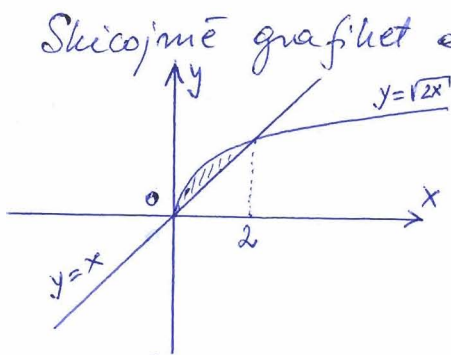
$$y - 3 = 12x$$

$$y = 12x + 3$$

ose $12x - y + 3 = 0$

22. Njehsoni syprinën e figurës që kufizohet nga grafikët e funksioneve: $y = \sqrt{2x}$ dhe $y = x$

3 pikë



Skicojmë grafikët e funksioneve $y = \sqrt{2x}$ dhe $y = x$.

gjejmë pikëpresjet e grafikëve $\begin{cases} y = \sqrt{2x} \\ y = x \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{2x} = x \Rightarrow 2x = x^2 \Rightarrow 2x - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ose } x = 2$$

Për $x \in]0; 2[$ vija e funksionit $y = \sqrt{2x}$ ndodhet mbi vijën $y = x$ sepse $\sqrt{2x} > x$

$$S = \int_0^2 (\sqrt{2x} - x) dx = \int_0^2 \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} dx - \int_0^2 x dx = \sqrt{2} \int_0^2 x^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^2 x dx =$$

$$= \left(\sqrt{2} \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \left(\sqrt{2} \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 =$$

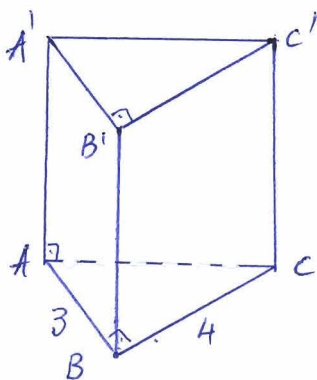
$$= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{2^3} - \frac{2^2}{2} \right) - (0 - 0) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2\sqrt{2} - 2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{8-6}{3} = \frac{2}{3}$$

$$S = \frac{2}{3} \text{ njehsi katrorë}$$

23. Jepet prizmi i drejtë trekëndor, baza e të cilit është trekëndëshi kënddrejtë me katete 3 cm dhe 4 cm. Faqja anësore e prizmit me syprinë më të madhe, është katror.

3 pikë

a) Të gjendet sipërfaqja e përgjithshme e tij.



Megë prizmi është i drejtë, faqet anësore të tij janë drejtëkëndështa me një brinjë të barabartë. Faqja me syprinë më të madhe është ajo që ka si brinjë hipotenuzën AC të ΔABC .

Pra $AA'C'C$ është katror. $\Rightarrow AC = A'A$

Nga Teorema e Pitagorës: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow AC = 5 \text{ cm} \Rightarrow A'A = 5 \text{ cm.}$$

$$S_p = S_a + 2 \cdot S_b$$

$$S_a = P \cdot h = (3+4+5) \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^2$$

$$S_b = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

$$\text{Kështu: } S_p = 60 + 2 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$$

b) Të gjendet vëllimi i tij.

1 pikë

$$V = S_b \cdot h \quad S_b = 6 \text{ cm}^2 ; \quad h = 5 \text{ cm}$$

$$V = 6 \cdot 5 = 30 \text{ cm}^3$$

24. Gjeni bashkësinë e përcaktimit të funksionit: $y = \sqrt{9-x^2} + \ln(2-x)$

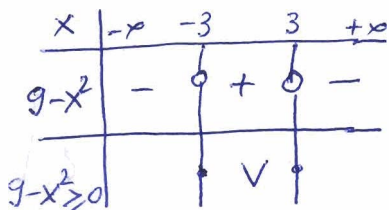
3 pikë

$$E = \{x \in \mathbb{R} / 9-x^2 \geq 0 \wedge 2-x > 0\} \Rightarrow \text{ose } \begin{cases} 9-x \\ 2-x > 0 \end{cases}$$

$$K_1 : \begin{aligned} 9-x^2 &\geq 0 \\ 9-x^2 &= 0 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

$$K_2 : \begin{aligned} 2-x &> 0 \\ -x &> -2 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

$$B =]-\infty; 2[$$

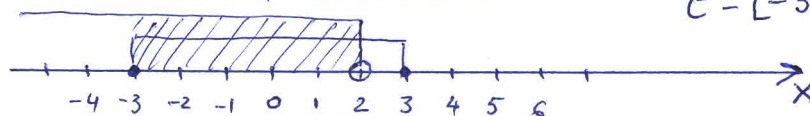


$$A = [-3; 3]$$

$$E = A \cap B$$

Paraqit'ni bashkësinë e zgjidhjeve në boshtin numerik:

$$E = [-3; 2[$$



25. Dy zare kubikë që kanë të shënuara në faqet e tyre shifrat nga 1 deri në 6, hidhen njëherazi.

Sa është probabiliteti i ngjarjes që shuma e shifrave të jetë më e vogël se 6?

2 pikë

$z_1 \backslash z_2$	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Numri i hapësirës së rezultateve

$$n(H) = 6 \cdot 6 = 36$$

Numri i rezultateve të provës

$$n(A) = 10$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(H)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$