

BARKODI



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
 MINISTRIA E ARSIMIT
 DHE SPORTIT
 AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

PROVIMI I MATURËS SHTETËRORE 2014

I DETYRUAR

VARIANTI A

E hënë, 09 qershor 2014

Ora 10.00

Lënda: MATEMATIKË (GJIMNAZI GJUHËSOR)

Udhëzime për nxënësin

Testi në total ka **25 pyetje**, 13 pyetje me zgjedhje (alternativa) dhe 12 pyetje me zhvillim. Në pyetjet me zgjedhje rrethoni **vetëm** shkronjën përbri përgjigjes së saktë, ndërsa për pyetjet me zhvillim është dhënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen. Koha për zhvillimin e pyetjeve të testit është **2 orë e 30 minuta**. Pikët për secilën kërkesë janë dhënë përbri saj.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Kërkesa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pikët										
Kërkesa	11	12	13	14	15	16a	16b	17	18	19
Pikët										
Kërkesa	20a	20b	21a	21b	22	23	24	25a	25b	
Pikët										

Totali i pikëve

KOMISIONI I VLERËSIMIT

1.....Anëtar

2.Anëtar

Për pyetjet 1 - 13 rrethoni vetëm shkronjën që i përgjigjet alternativës së saktë.

1. Jepen bashkësitë $A = \{1,3,5\}$ dhe $B = [1,5]$. Gjени cili nga pohimet e mëposhtme është i vërtetë. 1 pikë
- A) $B \subset A$
 B) $A \subset B$
 C) $A \cap B = B$
 D) $A \cup B = A$
2. Mesatarja e tri numrave $8, 3x, 4$ është 7. Gjени vlerën e x . 1 pikë
- A) 2
 B) 3
 C) 4
 D) 5
3. Jepet bashkësia $A = \{a, b, c\}$. Numri i nënbashkësive të A me 2 elemente është: 1 pikë
- A) 1
 B) 2
 C) 3
 D) 4
4. Gjени vlerën e shprehjes $\log 5 + \log \frac{1}{5}$. 1 pikë
- A) 0
 B) 1
 C) 2
 D) 3
5. Jepet $f(x) = 3x$ dhe $g(x) = x^2$. Funkcioni $(f \circ g)(x) =$ 1 pikë
- A) $2x^3$
 B) $(3x)^2$
 C) $3x^2$
 D) $(2x)^3$
6. Drejtëzat me ekuacione $y = 3x + 2$ dhe $y = 3ax + 5$ janë paralele. Vlera e a -së është e barabartë me: 1 pikë
- A) 1
 B) 3
 C) 5
 D) 7
7. Jepet inekuacioni $\frac{(x-4)}{(x-5)} > 0$. Cilat nga vlerat e mëposhtme NUK është zgjidhje e tij? 1 pikë
- A) 1
 B) 2
 C) 3
 D) 4

8. Kubi me brinjë $2a$ ka vëllim 64 dm^3 . Brinja e tij është:

1 pikë

- A) 2 dm
 B) 4 dm
 C) 6 dm
 D) 8 dm

9. Jepet $3^{x-1} = 9$. Vlera e x -it është:

1 pikë

- A) 2
 B) 3
 C) 4
 D) 5

10. Jepet $f(x) = \frac{x^2}{4-2x}$. Vlera e funksionit për $x = 4$ është:

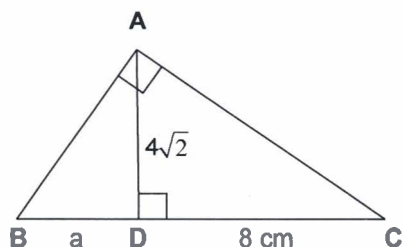
1 pikë

- A) 0
 B) 2
 C) -2
 D) -4

11. Jepet trekëndëshi kënddrejtë ABC me gjatësi brinjësh si në figurë. Vlera e a është:

1 pikë

- A) 1
 B) 2
 C) 3
 D) 4



12. Jepet progresioni gjeometrik $16, 8, 4, \dots$. Gjeni kufizën e katërt të tij.

1 pikë

- A) 2
 B) 1
 C) -1
 D) -2

13. Gjatësitë e brinjëve të një trekëndëshi janë 3cm, 7cm dhe 11cm. Një trekëndësh i ngjashëm me të e ka brinjën më të vogël 6cm. Gjeni gjatësinë e brinjës më të madhe të tij.

1 pikë

- A) 10
 B) 11
 C) 20
 D) 22

Pyetjet 14 – 25 janë me zgjidhje dhe arsytim.

14. Thjeshtoni shprehjen $\frac{x^2 - x}{(x-1)^2}$

2 pikë

$$\frac{x^2 - x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

15. Gjeni bashkësinë e përcaktimit të funksionit: $y = \log(4-x) + \sqrt{6+x}$

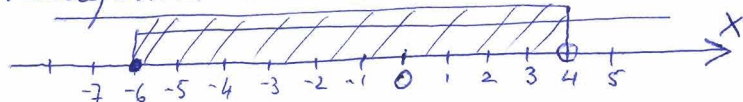
3 pikë

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid 4-x > 0 \wedge 6+x \geq 0\} \Rightarrow \text{ose} \begin{cases} 4-x > 0 \\ 6+x \geq 0 \end{cases}$$

$$k_1: \begin{aligned} 4-x > 0 \\ -x > -4 \\ x < 4 \end{aligned} \quad k_2: \begin{aligned} 6+x \geq 0 \\ x \geq -6 \end{aligned}$$

$$A =]-\infty; 4[\quad B = [-6; +\infty[\quad E = A \cap B$$

Paragesim në boshtin numerik bashkësinë e zgjidhjeve



$$E = [-6; 4[$$

16. Jepet trekëndëshi me kulme $A(0; 3)$, $B(4; 0)$ dhe $C(5; 4)$.

a) gjeni ekuacionin e AB

2 pikë

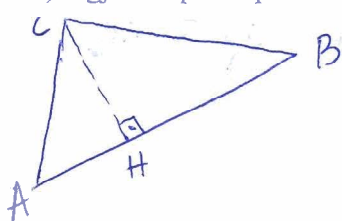
Ekuacioni i drejtëzës (AB) është:

$$(AB): \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} \Rightarrow \frac{x-0}{4-0} = \frac{y-3}{0-3} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y-3}{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x = 4(y-3) \Rightarrow -3x = 4y - 12 \Rightarrow (AB): \boxed{3x + 4y - 12 = 0}$$

b) gjeni sipërfaqen e trekëndëshit ABC

3 pikë



Për të gjetur sipërfaqen e ΔABC ,

Së pari: Gjatësinë e brinjës AB

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9}$$

$$AB = \sqrt{25} = 5 \quad \boxed{AB=5}$$

Së dyti: Largesën CH të pikës C nga drejtëza (AB):

$$d_{CH} = \frac{|Ax_C + By_C + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|15 + 16 - 12|}{\sqrt{25}} = \frac{19}{5}$$

$$\text{Atëherë } S_{ABC} = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{5 \cdot \frac{19}{5}}{2} = \frac{19}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{19}{2} \text{ njësi katrorë}$$

17. Rrethi me qendër $O(0;0)$ kalon nga pika $A(5;5)$. Gjeni sa njësi është rrezja e tij.

2 pikë

Ekuacioni i rrethit me qendër $O(0;0)$ dhe rreze r ka trajtën: $x^2 + y^2 = r^2$

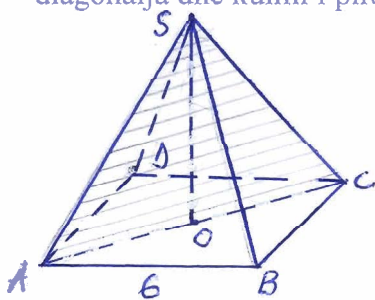
Megjithatë pika $M(5;5)$ ndodhet në rreth, koordinatat e saj vërtetojmë në ekuacionin e rrethit: $5^2 + 5^2 = r^2$

$$r^2 = 50$$

$$r = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\boxed{r = 5\sqrt{2}}$$

18. Jepet piramida e rregullt me bazë katrorin me brinjë 6cm. Prerja e saj me planin që kalon nga diagonalja dhe kulmi i piramidës është trekëndësh barabrinjës. Gjeni vëllimin e piramidës. 3 pikë



Megjithatë piramida është e rregullt, lartësia SO bie në qendër të katrorit të bazës, pra pika O është pikëprerja e diagonalëve.

: $AC = 6\sqrt{2}$ si diagonale e katrorit me brinjë 6cm.

Prerja diagonale e piramidës është trekëndëshi $\triangle ACS$.

Trekëndëshi $\triangle ACS$ është barabrinjës me brinjë $AS = AC = SC = 6\sqrt{2}$.

Lartësia SO e $\triangle ACS$ është $SO = \frac{AC \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$ cm.

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \quad \text{ku: } S_b = 6^2 = 36 \text{ cm}^2 \quad \text{dhe } h = SO = 3\sqrt{6} \text{ cm.}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 36 \text{ cm}^2 \cdot 3\sqrt{6} \text{ cm} = 36\sqrt{6} \text{ cm}^3$$

$$\boxed{V = 36\sqrt{6} \text{ cm}^3}$$

19. Gjeni limitin $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{3x - 3}$

2 pikë

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{3x - 3} = \frac{1 - 1}{3 - 3} = \frac{0}{0} \quad \text{formë e pacaktuar } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{3x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{3(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{3} = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{3}$$

20. Jepen vektorët $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ x \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Gjeni $\vec{a} + \vec{c}$

1 pikë

$$\vec{a} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Gjeni vlerën e x-it që $\vec{a} \perp \vec{b}$

2 pikë

Që vektori \vec{a} të jetë pingul me vektorin \vec{b} duhet që $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-2) + 4 \cdot x = 0 \Leftrightarrow -4 + 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$$

21. Jepet funksioni $f(x) = x^3 - 3x$

a) Studioni monotoninë e funksionit dhe gjeni ekstremumet e tij

3 pikë

Gjejme derivatin e parë dhe studiojmë shenjën e tij.

$$f'(x) = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Ndërtojmë tabelën e shenjave:

x	-∞	-1	1	+∞	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)		↗	↘	↗	
		max	min		

për $x \in]-\infty; -1[$

është rritës

për $x \in]-1; 1[$

funksioni është zbritës

për $x \in]1; +\infty[$

funksioni është rritës

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$$

Në pikat A(-1; 2) dhe B(1; -2)

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2$$

funksioni arrin ekstremume.

b) Shkruani ekuacionin e tangjentes ndaj grafikut të funksionit në pikën me abshisë x=2.

2 pikë

Ekuacioni i tangjentes ka trajtën:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

$$\text{Gjejme } f'(x): \quad f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 3 \cdot 4 - 3 = 12 - 3 = 9$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$$

Ekuacioni i tangjentes: $y - 2 = 9(x - 2)$

$$y - 2 = 9x - 18 \Rightarrow \boxed{y = 9x - 16} \quad \text{ose} \quad \boxed{9x - y - 16 = 0}$$

22. Zgjidhni ekuacionin $\cos x - 2\cos^2 x = 0$.

3 pikë

$$\cos x - 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x (1 - 2\cos x) = 0$$

Zgjidhjet e tij janë :

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ ose } x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$1 - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow -2\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

23. Jepet $f(x) = x^2 - 2x$. Gjeni sipërfaqen e figurës së kufizuar nga grafiku i funksionit dhe boshti i abshisave.

3 pikë

Shicojmë grafikun e funksionit $y = x^2 - 2x$

kulmi $(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a})$ $x_k = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$
 $y_k = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$
 $C(1; -1)$
 Pikëprerja me (ox) : $\begin{cases} y=0 \\ x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x=0 \text{ ose } x=2 \end{cases}$
 $A(0;0) \quad B(2;0)$

$$S = \int_0^2 -(x^2 - 2x) dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \int_0^2 -x^2 dx + 2 \int_0^2 x dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2 \right) - (0 + 0) = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{-8+12}{3} = \frac{4}{3}$$

$S = \frac{4}{3}$ njësi hatnore

24. Hidhet një zar kubik dhe një monedhë. Gjeni probabilitetin e ngjarjes “bie numër më i vogël se tre dhe lek”.

2 pikë

Hapësira e rezultateve është :

$$H = \{(1;S) (2;S) (3;S) (4;S) (5;S) (6;S) (1;L) (2;L) (3;L) (4;L) (5;L) (6;L)\}$$

$$n(H) = 12$$

Rezultatet e provës janë : $A = \{(1;L) (2;L)\}$ $n(A) = 2$

Probabiliteti i ngjarjes : $P(A) = \frac{n(A)}{n(H)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

25. Jepet hiperbola $4x^2 - 9y^2 = 36$

a) Gjeni boshtin real dhe boshtin imagjinar

2 pikë

Shkruajmë ekuacionin e thjeshtuar: $\frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow \text{boshti real është } 2a = 6$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \text{boshti imagjinar është: } 2b = 4.$$

b) Gjeni ekuacionin e tangjenteve ndaj hiperbolës paralele me drejtëzën $y = 2x + 1$

2 pikë

Ekuacioni i tangjentes ndaj hiperbolës paralele me drejtëzën ka trajtën: $y = 2x + t$ ($k_{tj} = k_d = 2$)
 Kushti i tangjencës së drejtëzës $y = kx + t$ me hiperbolën $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ është: $a^2k^2 - b^2 = t^2$

$$\text{Zëvendësojmë: } 9 \cdot 2^2 - 4 = t^2$$

$$9 \cdot 4 - 4 = t^2$$

$$t^2 = 32 \Rightarrow t = \pm \sqrt{32}$$

$$t = \pm 4\sqrt{2}$$

Ekuacionet e tangjenteve janë: $y = 2x + 4\sqrt{2}$
 $y = 2x - 4\sqrt{2}$