

BARKODI



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
 MINISTRIA E ARSIMIT
 DHE SPORTIT
 AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

PROVIMI I MATURËS SHTETËRORE 2014

I DETYRUAR

VARIANTI A

E hënë, 09 qershor 2014

Ora 10.00

Lënda: MATEMATIKË (PROFESIONALE)

Udhëzime për nxënësin

Testi në total ka **25 pyetje**, 13 pyetje me zgjedhje (alternativa) dhe 12 pyetje me zhvillim.

Në pyetjet me zgjedhje rrethoni **vetëm** shkronjën përbri përgjigjes së saktë, ndërsa për pyetjet me zhvillim është dhënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.

Koha për zhvillimin e pyetjeve të testit është **2 orë e 30 minuta**.

Pikët për secilën kërkesë janë dhënë përbri saj.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Kërkesa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pikët										
Kërkesa	11	12	13	14	15	16	17a	17b	18	19a
Pikët										
Kërkesa	19b	20a	20b	21	22	23	24a	24b	25	
Pikët										

Totali i pikëve

KOMISIONI I VLERËSIMIT

1.....Anëtar

2.Anëtar

Për pyetjet 1 - 13 rrethoni vetëm shkronjën që i përgjigjet alternativës së saktë.

1. Jepen bashkësitë $A = [-2, 0]$ dhe $B = [-1, 2]$. Bashkësia $A \cap B$ është:

1 pikë

- A) $[-2, -1]$
 B) $[-1, 0]$
 C) $[-2, 2]$
 D) $[0, 2]$

2. $2^4 \cdot 2^{-3} =$

1 pikë

- A) 2
 B) 4
 C) 6
 D) 8

3. Koefficienti këndor i drejtëzës $4x - y + 8 = 0$ është:

1 pikë

- A) 2
 B) 4
 C) 6
 D) 8

4. Diagonalja e katrorit me brinjë $a = 2$ është:

1 pikë

- A) 1
 B) 2
 C) $2\sqrt{2}$
 D) $\sqrt{2}$

5. Nëse $f(x) = 2+x$ dhe $g(x) = 2x$ atëherë $(f \circ g)x =$

1 pikë

- A) $2 + 2x$
 B) $4x$
 C) $4 + x$
 D) $4 + 2x$

6. Vlera e funksionit $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ në pikën $x = 1$ është:

1 pikë

- A) 1
 B) 2
 C) 3
 D) 4

7. Në progresionin aritmetik 5, 11, 17, ..., kufiza e pestë e tij është:

1 pikë

- A) 23
 B) 25
 C) 27
 D) 29

8. $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha =$

1 pikë

- A) $\sin 2\alpha$
B) $\cos 2\alpha$
C) $\operatorname{tg} 2\alpha$
D) $\operatorname{cotg} 2\alpha$

9. $\log 7 - \log 2 =$

1 pikë

- A) $\log 5$
B) $\log 9$
C) $\log 14$
 D) $\log \frac{7}{2}$

10. Nëse $3 - a = 2$ atëherë $9 - a^2 =$

1 pikë

- A) 2
B) 4
C) 6
 D) 8

11. Vlera më e madhe e funksionit $y = 1 + \sin x$ është:

1 pikë

- A) 0
 B) 2
C) 4
D) 6

12. Vija e mesme e trekëndëshit është 3 cm. Baza e tij është:

1 pikë

- A) 12 cm
B) 9 cm
 C) 6 cm
D) 3 cm

13. Numri i rrënjëve të ekuacionit $x^2 - 5x + 3 = 0$ është:

1 pikë

- A) asnjë
B) një
 C) dy
D) tre

Pyetjet 14 – 25 janë me zgjidhje dhe arsytim.

14. Jepen funksionet $f(x) = 2^x$ dhe $g(x) = 4^x$, $x \in \mathbb{R}$. Gjeni abshisën e pikës së prerjes së grafikëve të tyre. 2 pikë

Pikëprerja e grafikëve është zgjidhja e sistemit:
$$\begin{cases} y=2^x \\ y=4^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2^x = 4^x \Rightarrow 2^x = (2^2)^x \Rightarrow 2^x = 2^{2x} \Rightarrow x = 2x \Rightarrow 2x - x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

 Abscisa e pikës së prerjes së grafikëve është 0.

15. Thjeshtoni shprehjen $(2a + 2)^2 - 4a^2 - 8$. 2 pikë

kryejmë shndërrimet identike në shprehjen

$$(2a+2)^2 - 4a^2 - 8 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 2 + 2^2 - 4a^2 - 8 =$$

$$= 4a^2 + 8a + 4 - 4a^2 - 8 = 8a - 4.$$

16. Zgjidhni inekuacionin $2x^2 - 5x + 3 \leq 0$. Paraqitni zgjidhjen e tij në boshtin numerik. 3 pikë

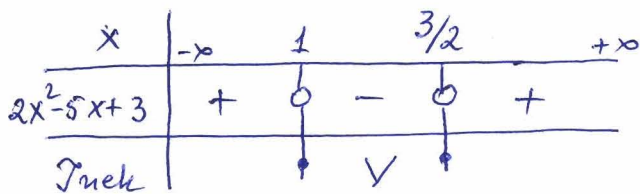
$$2x^2 - 5x + 3 \leq 0$$

Studiojmë shenjën e trinomit $2x^2 - 5x + 3$

$$a=2; b=-5; c=3$$

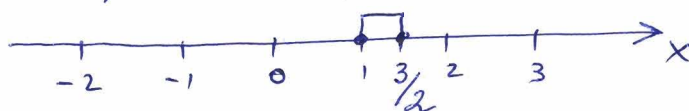
$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1.$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$



$$I = \left[1; \frac{3}{2} \right]$$

Paraqitim zgjidhjen në boshtin numerik:



17. Jepen pikat $A(-4;2)$ dhe $B(4;-2)$

a) Shkruani ekuacionin e rrethit me diametër AB.

3 pikë

Për të gjetur ekuacionin e rrethit:

Së pari: Gjejmë koordinatat e qendrës $Q(a;b)$ të tij, të cilat janë mesi i segmentit AB.

$$a = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-4 + 4}{2} = 0 \quad ; \quad b = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = 0 \quad Q(0;0)$$

Së dyti: Gjejmë rrezën e tij, e cila është sa largesa AQ.

$$r = AQ = \sqrt{(x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2} = \sqrt{[0 - (-4)]^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

Së treti: Ekuacioni i rrethit ka trajtën:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = \sqrt{20}$$

Ekuacioni i rrethit është: $x^2 + y^2 = 20$

b) Gjeni ekuacionin e tangjentes së hequr ndaj tij në pikën A.

2 pikë

Ekuacioni i tangjentes ndaj rrethit $x^2 + y^2 = r^2$ në pikën A të tij, ka trajtën: $x \cdot x_A + y \cdot y_A = r^2$

$$\text{Zëvendësojmë: } x \cdot (-4) + y \cdot 2 = 20 \Rightarrow -4x + 2y - 20 = 0$$

Ekuacioni i tangjentes është: $2x - y + 10 = 0$

18. Gjeni bashkësinë e përcaktimit të funksionit $y = \frac{1}{\log(x-1)}$.

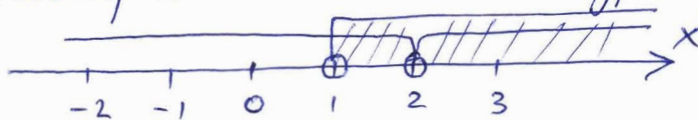
3 pikë

$$E = \{x \in \mathbb{R} / \log(x-1) \neq 0 \text{ dhe } x-1 > 0\} \quad \begin{cases} \log(x-1) \neq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases}$$

$$k_1: \log(x-1) \neq 0 \Rightarrow \log(x-1) \neq \log 1 \Rightarrow x-1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$$

$$k_2: x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Paragesim bashkësinë e zgjidhjave në boshtin numerik:



$$E =]1; 2[\cup]2; +\infty[$$

19. Jepet elipsi $x^2 + 4y^2 = 16$.

a) Gjeni gjysmëboshtet e elipsit.

2 pikë

Shkruajmë ekuacionin e thjeshtuar të elipsit:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{16} = \frac{16}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow \boxed{a = 4} \quad b^2 = 4 \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

b) Gjeni pikat e prerjes së tij me drejtëzën $y = 1$.

2 pikë

Pikat e prerjes së drejtëzës $y=1$ me elipsin $x^2 + 4y^2 = 16$ janë zgjidhjet e sistemit $\begin{cases} y=1 \\ x^2 + 4y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x^2 + 4 \cdot 1^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x^2 + 4 = 16 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x = \pm \sqrt{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x = \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Pikat e prerjes janë $M_1(-2\sqrt{3}; 1)$ dhe $M_2(2\sqrt{3}; 1)$

20. Jepen pikat $A(2;0)$ dhe $B(0;4)$.

a) Gjeni ekuacionin e drejtëzës që kalon nga origjina e koordinatave dhe është pingule me drejtëzën AB.

3 pikë

Për të gjetur ekuacionin e drejtëzës (d) të kërkuar

së pari: Gjejmë ekuacionin e drejtëzës (AB):

$$(AB): \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow \frac{x - 2}{0 - 2} = \frac{y - 0}{4 - 0} \Rightarrow \frac{x - 2}{-2} = \frac{y}{4} \Rightarrow 4(x - 2) = -2y$$

$$\Rightarrow 4x - 8 = -2y \Rightarrow 4x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow (AB): \boxed{2x + y - 4 = 0}$$

së dyti: Gjejmë ekuacionin e (d) me formulën:

$$B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0 \text{ ku } B = 1 \text{ dhe } A = 2$$

$$(d): 1(x - 0) - 2(y - 0) = 0 \Rightarrow \boxed{x - 2y = 0}$$

b) Gjeni largesën e origjinës së koordinatave nga drejtëza AB.

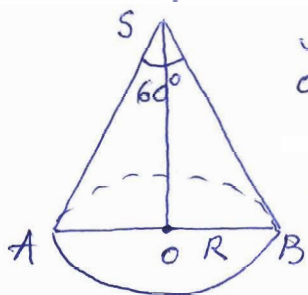
1 pikë

Largesa e pikës $O(0;0)$ nga drejtëza (AB) është:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow d = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Kështu } \boxed{d = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ njësi}}$$

21. Jepet koni i drejtë rrethor me përftuese 10 cm. Plani i prerjes, që kalon nga kulmi dhe diametri i bazës së tij, është trekëndësh me këndin në kulm 60° . Gjeni vëllimin e konit. 3 pikë



Plani i prerjes, që kalon nga kulmi dhe diametri i bazës është trekëndëshi SAB.

Trekëndëshi SAB është trekëndësh dy brinjënjëshëm me brinjët anësore $SA = SB = 10$ cm dhe kënd në kulm $\widehat{ASB} = 60^\circ$. Si rrjedhim ΔSAB është barabrinjës me brinjë 10 cm, pra $AB = 10$ cm $\Rightarrow R = 5$ cm.

$$\text{Lartësia e konit } SO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \quad \text{ku: } S_b = \pi R^2 \Rightarrow S = \pi 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2; \quad h = SO = 5\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 25\pi \cdot 5\sqrt{3} = \frac{125\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$$

$$V = \frac{125\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$$

22. Gjeni $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$.

2 pikë

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \quad \text{formë e pacaktuar } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)(x^2 + 1) = (1 + 1)(1^2 + 1) = 2 \cdot 2 = 4.$$

23. Mesatarja e 5 numrave të dhënë është 40. Dy nga numrat janë 52 dhe 73.

Nëse ata i heqim nga vargu me 5 numra, gjeni mesataren e numrave që mbeten. 2 pikë

$$\text{Nga kuptimi i mesatares: } m_5 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + 52 + 73}{5} = 40$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 125 = 40 \cdot 5 = 200$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 200 - 125 = 75$$

Atëherë:

$$m_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{75}{3} = 25$$

$$m_3 = 25$$

24. Jepet funksioni $y = 2x^3 - 24x$.

a) Studioni monotoninë e funksionit.

3 pikë

Për të studiuar monotoninë, gjyq derivat'in e parë dhe studiojmë shenjën e tij

$$f'(x) = (2x^3 - 24x)' = (2x^3)' - (24x)' = 6x^2 - 24$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 24 = 0 \Rightarrow 6x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Vdërtojmë tabelën e shenjave:

x	-∞	-2	2	+∞	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗		↘		↗
		max	min		

për $x \in]-\infty; -2[$ funksioni është rritës
 për $x \in]-2; 2[$ funksioni është zbritës
 për $x \in]2; +\infty[$ funksioni është rritës.

b) Studioni përkulshmërinë e funksionit dhe gjeni pikën e infleksionit të grafikut të tij.

2 pikë

Për të studiuar përkulshmërinë, gjejmë derivat'in e dytë dhe studiojmë shenjën e tij:

$$f''(x) = (6x^2 - 24)' = 12x \quad ; \quad f''(x) = 0 \Rightarrow 12x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	-∞	0	+∞
f''(x)	-	0	+
f(x)	∩		∪
		p.inf.	

për $x \in]-\infty; 0[$ grafiku i funksionit është i mysët
 për $x \in]0; +\infty[$ grafiku i funksionit është i lugët
 $f(0) = 2 \cdot 0^3 - 24 \cdot 0 = 0$ Pika $A(0; 0)$ është pikë infleksioni.

25. Gjeni sa numra trashifrorë, pa përsëritje të shifrave, formohen me shifrat 1,2,3,4.

Nëse zgjedhim rastësisht një prej tyre, gjeni probabilitetin që ai të jetë më i madh se 400.

2 pikë

Numrat trashifrorë që formohen pa përsëritje janë:

$$\boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ numra}$$

$$\boxed{n(H) = 24}$$

Numra më të mëdhenj se 400 janë:

$$\boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6 \text{ numra}$$

Numri i rezultateve të provës është $\boxed{n(A) = 6}$

Probabiliteti i ngjarjes është: $P(A) = \frac{n(A)}{n(H)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$