

BARKODI



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
 MINISTRIA E ARSIMIT
 DHE SPORTIT
 AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

PROVIMI I MATURËS SHTETËRORE 2015

I DETYRUAR

VARIANTI A

E martë, 09 qershor 2015

Ora 10.00

Lënda: MATEMATIKË (GJIMNAZI GJUHËSOR)

Udhëzime për nxënësin

Testi në total ka **25 pyetje**, 13 pyetje me zgjedhje (alternativa) dhe 12 pyetje me zhvillim.
 Në pyetjet me zgjedhje rrethoni **vetëm** shkronjën përbri përgjigjes së saktë, ndërsa për pyetjet me zhvillim është dhënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.
 Koha për zhvillimin e pyetjeve të testit është **2 orë e 30 minuta**.
 Pikët për secilën kërkesë janë dhënë përbri saj.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Kërkesa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pikët										
Kërkesa	11	12	13	14	15a	15b	15c	16	17	18
Pikët										
Kërkesa	19a	19b	20	21	22a	22b	23	24	25a	25b
Pikët										

Totali i pikëve

KOMISIONI I VLERËSIMIT

1.....Anëtar

2.....Anëtar

Për pyetjet 1-13 rrethoni vetëm shkronjën që i përgjigjet alternativës së saktë.

1. Vlera e $\log_2 8 - \log_2 4$ është:

1 pikë

- A) 5
B) 4
C) 2
 D) 1

2. Rrënjë e polinomit $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ është numri:

1 pikë

- A) 0
 B) 1
C) 2
D) 3

3. Vlera e pa lejuar e ndryshores tek shprehja $\frac{3}{2x-4}$ është:

1 pikë

- A) 0
B) 1
 C) 2
D) 4

4. Jepen bashkësitë $A =]0; 3]$ dhe $B = [-1; 4]$. Bashkësia $A \cap B$ është:

1 pikë

- A) $]0; 3[$
 B) A
C) B
D) $[3; 4]$

5. Në trapezin kënddrejtë njëri kënd është 75° . Këndi tjetër i tij është:

1 pikë

- A) 95°
B) 100°
 C) 105°
D) 115°

6. Vlera e shprehjes $\sqrt{6 + \sqrt{9}}$ është:

1 pikë

- A) 0
B) 1
C) 2
 D) 3

7. Jepet ekuacioni $x^2 - bx + 4 = 0$. Nëse ekuacioni ka dy rrënjë të barabarta, atëherë vlera e b -së është:

1 pikë

- A) 4
B) 8
C) 12
D) 16

8. Inekuacioni $2x - 2 > 4x - 6$ është i njëvlershëm me inekuacionin:

1 pikë

- A) $x < 2$
B) $x > 6$
C) $x < 6$
D) $x > 2$

9. Diagonalet e një rombi janë përkatësisht 5cm dhe 10cm. Syprina e tij (në cm²) është:

1 pikë

- A) 15
- B) 20
- C) 25
- D) 30

10. Vlera e shprehjes $\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ$ është:

1 pikë

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3

11. Vlera e shprehjes $3^4 \cdot 3^{-3}$ është:

1 pikë

- A) 3⁻²
- B) 3⁻¹
- C) 3
- D) 3⁰

12. Jepet funksioni $f(x) = 2x^4 - 4x$. Vlera e derivatit për $x = 1$ është :

1 pikë

- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 8

13. Kufiza e n -të e një progresioni aritmetik është $y_n = 3n + 1$. Kufiza e tretë e tij është:

1 pikë

- A) 4
- B) 6
- C) 8
- D) 10

14. Për ç'vlera të parametrin k funksioni $y = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{1 - \sqrt{x}} & \text{për } x \neq 1 \\ k & \text{për } x = 1 \end{cases}$ është i vazhdueshëm në \mathbb{R} .

3 pikë

Që funksioni të jetë i vazhdueshëm në \mathbb{R} , duhet të jetë i vazhdueshëm edhe në $x = 1$.

Kjo ndodh kur plotësohet kushti: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

1. $f(1) = k$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - \sqrt{x}} = \frac{1^2 - 1}{1 - \sqrt{1}} = \frac{0}{0}$ (formë e pacaktuar)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(1+\sqrt{x})}{(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} -(x+1)(1+\sqrt{x}) =$$

$$= -(1+1)(1+\sqrt{1}) = -4$$

3. $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow \boxed{k = -4}$

Për $k = -4$ funksioni është i vazhdueshëm në \mathbb{R} .

15. Jepet funksioni $y = -x^2 + 2x$.

a) Gjeni pikat ku grafiku i funksionit pret boshtin OX dhe OY.

2 pikë

Grafiku pret boshtin OX : $y = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x = 0$

$$x(-x+2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ose } -x+2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ose } x = 2$$

$$A(0; 0) ; B(2; 0)$$

Grafiku pret boshtin OY : $x = 0 \Rightarrow y = -0^2 + 2 \cdot 0 = 0$

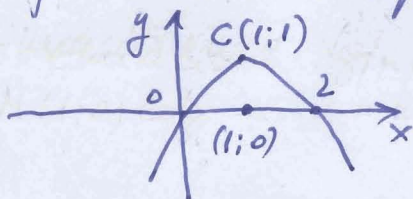
Pra $A(0; 0)$.

b) Gjeni ekuacionin e tangjentes ndaj grafikut të hequr nga pika $M(1; 0)$.

2 pikë

Ekuacioni i tangjentes ndaj grafikut të funksionit në një pikë të tij, ka trajtën : $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, ku $(a; f(a)) \in$ grafik.

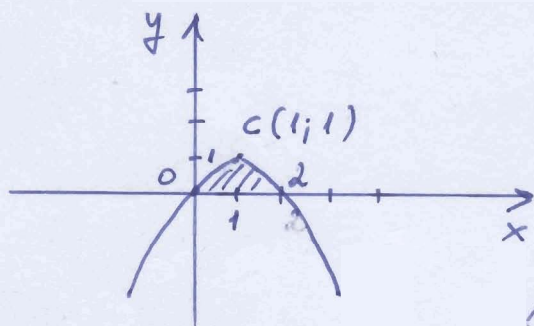
Mirëpo pika $M(1; 0)$ nuk është pikë e grafikut të funksionit, sepse $f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1 \neq 0$



Nga pozicioni i pikës M në figurë shihet që çdo drejtë që kalon në të, e pret grafikun. Pra s'mund të jetë tangjente.

c) Gjeni syprinën e figurës që kufizohet nga grafiku i funksionit dhe boshtit OX.

3 pikë



Shicojmë grafikun e funksionit, i cili paraqet një parabolë me kulm në pikën $C(m, n)$, me krahë që tentojnë poshtë.

$$m = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1 \quad n = \frac{-D}{4a} = \frac{-(4-0)}{4 \cdot (-1)} = 1$$

$$S = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^2 =$$

$$\left[-\frac{2^3}{3} + 2^2 \right] - \left[-\frac{0^3}{3} + 0^2 \right] = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{-8+12}{3} = \frac{4}{3} \text{ njeh' katror.}$$

16. Gjeni bashkësinë e përcaktimit të funksionit $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$.

2 pikë

$$E = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 6x + 5 \geq 0\}$$

Zgjidhim inekuacionin $x^2 - 6x + 5 \geq 0$

1. $x^2 - 6x + 5 = 0$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$$

$$x_1 = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

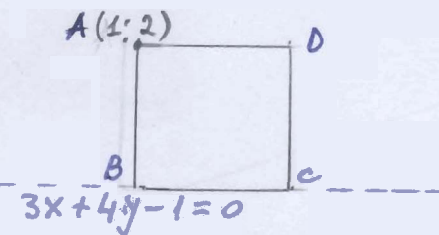
2. Ndëtojmë tabelën e shenjave:

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$x^2 - 6x + 5$	+	0	-	0	+
Tr.	√	√	√	√	

3. $E =]-\infty; 1] \cup [5; +\infty[$

17. Ekuacioni i njëres brinjë të katrorit është $3x + 4y - 1 = 0$ dhe pika $A(1;2)$ një kulm i tij. Gjeni syprinën e katrorit.

2 pikë



Le të jetë ekuacioni i BC: $3x + 4y - 1 = 0$

$$S_{ABCD} = l^2$$

Gjatësia e brinjës AB, të katrorit, është sa largësia e pikës $A(1;2)$ nga

drejtëza (BC), $\Rightarrow AB = l = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5}$

$l = 2$ njësi.

$$S_{ABCD} = 2^2 = 4 \text{ njësi katrore}$$

18. Mesatarja aritmetike e 10 numrave është 20. Mesatarja e 7 prej tyre është 23.

Sa është secili nga numrat e tjerë, nëse ata janë të barabartë midis tyre?

2 pikë

$$M_{10} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10} = 20 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 200$$

$$\text{Por } M_7 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_7}{7} = 23 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 161$$

Shuma e tre numrave të tjerë është: $200 - 161 = 39$

Meqë këta numra janë të barabartë, secili prej tyre është: $39 : 3 = 13$.

19. Jepen pikat A(0;2) dhe B(2;0).

a) Gjeni koordinatat e mesit të segmentit AB.

1 pikë

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0 + 2}{2} = 1$$

$$M(1;1)$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 0}{2} = 1$$

b) Gjeni ekuacionin e përmesores së segmentit AB.

2 pikë

Përmesorja e segmentit AB është drejtëza (p) përqendër në mesin e tij.

Së pari: Gjejmë ekuacionin e (AB): $\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}$

$$(AB): \frac{x-0}{2-0} = \frac{y-2}{0-2} \Rightarrow -2x = 2(y-2) \Rightarrow -2x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x+y-2=0}$$

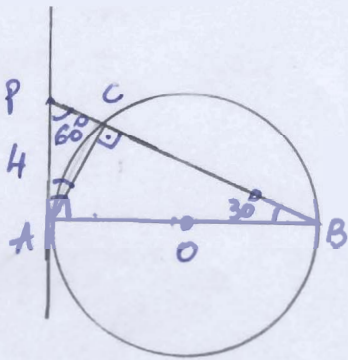
Së dyti: Ekuacioni i (p) ka trajtën: $x-y+c=0$

$$M(1;1) \in (p) \Rightarrow 1-1+c=0 \quad c=0 \Rightarrow (p): \boxed{x-y=0}$$

Ekuacioni i përmesores së [AB] është: $\boxed{x-y=0}$

20. Jepet rrethi me diametër AB. Nga pika A hiqet tangjentja me rrethin, kurse nga pika B hiqet një drejtëz e cila formon me diametrin këndin 30° dhe pret rrethin në pikën C, kurse tangjenten në pikën P. Gjeni syprinën e trekëndëshit APC, nëse $PA = 4\text{cm}$.

2 pikë



Tangjentja me rrethin është përqendër në mesin e tij në pikën e takimit, $\hat{PAB} = 90^\circ$. $\hat{APB} = 60^\circ$; $\hat{ACB} = 90^\circ$ si kënd nëthor që mbështetet në diametër.

Në trekëndëshin kënddrejtë ACP, $\hat{PAC} = 30^\circ$. $PC = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2\text{cm}$.

$$S_{ACP} = \frac{PC \cdot AC}{2}, \quad AC^2 = AP^2 - PC^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \quad AC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$S_{ACP} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\text{cm}^2$$

21. Në një kuti ndodhen 6 sfera të zeza dhe 3 sfera të bardha. Nga kutia nxirren rastësisht 3 sfera. Sa është probabiliteti që sferat e nxjerra të jenë 2 të zeza dhe 1 e bardhë?

3 pikë

Nga kutia me 9 sfera gjithësej, formohen $C_{9,3}$ grupe me 3 sfera
 Pra $n(H) = C_{9,3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$.
 Dy sfera të zeza dhe një e bardhë zgjidhet në $C_{6,2} \cdot C_{3,1}$ mënyra
 $n(A) = C_{6,2} \cdot C_{3,1} = 15 \cdot 3 = 45$ grupe $P(A) = \frac{n(A)}{n(H)} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$.

22. Jepet elipsi me ekuacion $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$.

a) Gjeni vatrën e elipsit

2 pikë

$$a^2 = 17; \quad b^2 = 8; \quad c^2 = a^2 - b^2 = 17 - 8 = 9 \Rightarrow c = 3$$

$$F_1(-3; 0) \quad F_2(3; 0)$$

b) Gjeni vlerën e parametrin t që drejtëza $y = -x + t$ të jetë tangjente me elipsin.

2 pikë

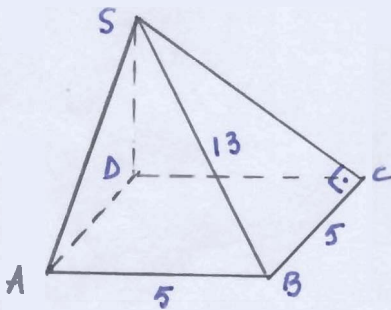
Që drejtëza me ekuacion $y = -x + t$, të jetë tangjente me elipsin duhet të plotësohet: $a^2 k^2 + b^2 = t^2$

$$17 \cdot (-1)^2 + 8 = t^2 \Rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow t = \pm 5$$

Për vlerën e $t = \pm 5$, drejtëza është tangjente me elipsin.

23. Piramida katërkëndore SABCD e ka bazën ABCD katror me brinjë 5 cm. SD është pingul me planin e bazës. Gjeni syprinën e faqes anësore SBC nëse SB = 13 cm.

3 pikë



Shpreh $SD \perp (ABCD) \Rightarrow SC$ e pjetret me planin.
 DC është projektioni horizontal i SC në këtë plan.

$$\left. \begin{array}{l} SD \perp (ABCD) \\ DC \perp BC \end{array} \right\} \begin{array}{l} T. 3. \perp \\ \implies \end{array} SC \perp BC$$

$$S_{SBC} = \frac{SC \cdot BC}{2}$$

$$\text{Në } \triangle SBC : SC^2 = SB^2 - BC^2, \quad SC^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$$

$$SC = 12 \text{ cm}$$

$$S_{SBC} = \frac{12 \cdot 5}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

24. Të zgjidhet ekuacioni $\log(x^2-3x) = 1$ në R.

2 pikë

1. Mjedi'si: $x^2 - 3x > 0$
 $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0; x = 3$

x	-∞	0	3	+∞
$x^2 - 3x$	+	0	-	+
		∨		∨

Mjedi'si $E =]-\infty; 0[\cup]3; +\infty[$

2. $\log(x^2 - 3x) = 1$
 $\log(x^2 - 3x) = \log 10$

$$x^2 - 3x = 10$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

3. Megjithatë numrat $-2 \in E$ dhe $5 \in E$ zgjidhje e ekuacionit është bashkësia $A = \{-2; 5\}$

25. Jepet funksioni $y = x^3 - 6x^2 + 11$.

a) Studioni monotoninë e funksionit.

2 pikë

1. Gjejme derivatin e funksionit: $y' = (x^3 - 6x^2 + 11)' = 3x^2 - 12x$

2. Studijmë shenjat e $y' = 3x^2 - 12x$

$$3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ose } x = 4$$

x	-∞	0	4	+∞
y'	+	0	-	+
y		↗	↘	↗
		max		

Për $x \in]-\infty; 0[$ funksioni është rritës

Për $x \in]0; 4[$ funksioni është

Për $x \in]4; +\infty[$ funksioni është rritës.

b) Studioni përkulshmërinë e grafikut të funksionit.

2 pikë

1. Gjejme derivatin e dytë të funksionit:

$$y'' = (3x^2 - 12x)' = 6x - 12$$

2. Studijmë shenjat e tij: $6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

x	-∞	2	+∞
y''	-	0	+
y		∩	∪
		p.i.	

Për $x \in]-\infty; 2[$ funksioni është i mbytur

Për $x \in]2; +\infty[$ funksioni është i lartë.