

BARKODI



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
 MINISTRIA E ARSIMIT
 DHE SPORTIT
 AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

PROVIMI I MATURËS SHTETËRORE 2015

I DETYRUAR

VARIANTI A

E martë, 09 qershor 2015

Ora 10.00

Lënda: MATEMATIKË (PROFESIONALE)

Udhëzime për nxënësin

Testi në total ka **25 pyetje**, 13 pyetje me zgjedhje (alternativa) dhe 12 pyetje me zhvillim.

Në pyetjet me zgjedhje rrethoni **vetëm** shkronjën përbri përgjigjes së saktë, ndërsa për pyetjet me zhvillim është dhënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.

Koha për zhvillimin e pyetjeve të testit është **2 orë e 30 minuta**.

Pikët për secilën kërkesë janë dhënë përbri saj.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Kërkesa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pikët										
Kërkesa	11	12	13	14	15	16a	16b	16c	17a	17b
Pikët										
Kërkesa	18a	18b	19	20	21	22	23	24	25	
Pikët										

Totali i pikëve

KOMISIONI I VLERËSIMIT

1.....Anëtar

2.Anëtar

Për pyetjet 1 - 13 rrethoni vetëm shkronjën që i përgjigjet alternativës së saktë.

1. Jepen bashkësitë $A = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$ dhe $B = \{-2; 0; 2\}$. Atëhere $n(A \cap B)$ është: **1 pikë**

- A) 0
B) 1
 C) 2
D) 3

2. Numri i rrënjëve reale të ekuacionit $x^2 - 3x + 2 = 0$ është: **1 pikë**

- A) 0
B) 1
 C) 2
D) 3

3. Vlera e $2^{-1} \cdot 10$ është: **1 pikë**

- A) 20
 B) 5
C) 4
D) 2

4. Jepen vektorët $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dhe $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, atëhere vlera e $\vec{a} \cdot \vec{b}$ është: **1 pikë**

- A) -6
 B) -5
C) -3
D) -2

5. Diagonalja dhe brinja e një drejtëkëndëshi janë 10m dhe 8m. Syprina e tij (në m^2) është: **1 pikë**

- A) 18
B) 36
C) 40
 D) 48

6. Jepet funksioni $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Derivati i tij për $x = 2$ është: **1 pikë**

- A) 1
B) 3
 C) 5
D) 7

7. Në progresionin gjeometrik jepen $y_3 = 8$ dhe $y_2 = 2$. Herësi i tij është: **1 pikë**

- A) 4
B) 2
C) 1
D) 0,5

8. Vlera e $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2} - x \right)$ është: **1 pikë**

- A) -1
B) 0
C) 2
D) 3

9. Vlera e $\log 2 + \log 50$ është e barabartë me: **1 pikë**

- A) 52
B) $\log 52$
C) $\log 25$
 D) 2

10. Jepen pikat $A(-2;1)$ dhe $B(3;5)$. Ordinata e mesit të segmentit AB është:

1 pikë

- A) -1
 B) -2
 C) 3
 D) 6

11. Pika $A(x, -3)$ është pikë e drejtëzës $2x-3y+1=0$. Vlera e x është:

1 pikë

- A) -1
 B) -2
 C) -3
 D) -5

12. Nëse α është kënd i kuadrantit të IV dhe $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, atëherë $\sin \alpha$ është:

1 pikë

- A) 1
 B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 C) $-\frac{1}{2}$
 D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

13. Inekuacioni $3-2x < x$ është i njëvlefshëm me:

1 pikë

- A) $x < 3$
 B) $x > 1$
 C) $x < 1$
 D) $2x > 3$

14. Jepet progresioni aritmetik ku $y_1 = 3$ dhe $d = 2$. Gjeni mesataren aritmetike të 10 kufizave të para.

3 pikë

$$M = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{10}}{10}$$

Megjithatë $y_1 + y_2 + \dots + y_{10}$ është shuma e 10 kufizave të para të progresionit aritmetik keni: $y_1 + y_2 + \dots + y_{10} = S_{10}$

$$S_{10} = \frac{(y_1 + y_{10}) \cdot 10}{2} \quad y_1 = 3 \quad y_{10} = y_1 + 9 \cdot d$$

$$y_{10} = 3 + 9 \cdot 2 = 21$$

$$S_{10} = \frac{(3 + 21) \cdot 10}{2} = 24 \cdot 5 = 120$$

$$M = \frac{120}{10} = 12$$

15. Thjeshtoni shprehjen $\sqrt{32} - \sqrt{18}$.

2 pikë

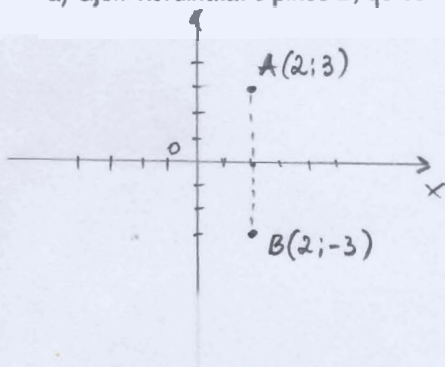
$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2} \quad \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} - \sqrt{18} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

16. Në planin koordinativ jepet pika $A(2;3)$.

a) Gjeni kordinatat e pikës B, që është simetrike e A në lidhje me boshtin OX.

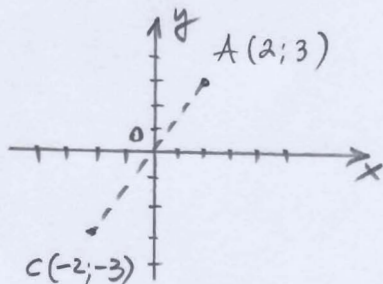
1 pikë



$$A(2;3) \xrightarrow{S(OX)} B(2;-3)$$

b) Gjeni kordinatat e pikës C, që është simetrike e A në lidhje me origjinën.

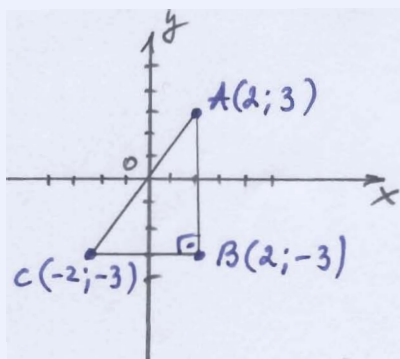
1 pikë



$$A(2;3) \xrightarrow{S(O)} C(-2;-3)$$

c) Gjeni syprinën e trekëndëshit ABC.

2 pikë



ΔABC është kënddrejtë në B.

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AB}{2}$$

$$BC = 2 \cdot x_B = 2 \cdot 2 = 4 \text{ njeh}$$

$$AB = 2 \cdot y_A = 2 \cdot 3 = 6 \text{ njeh}$$

$$S_{ABC} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 \text{ njeh katrore.}$$

17. Jepet funksioni $y = 2 + 3x - x^3$.

a) Studjoni monotoninë e funksionit.

2 pikë

Gjejmë derivatin e parë dhe studiojmë shenjën e tij.

$$y' = (2 + 3x - x^3)' = 3 - 3x^2; \quad y' = 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Ndestojmë tabelën e shenjave:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	-	0	0	-
y		min	max	

për $x \in]-\infty; -1[$ funksioni është zbritës
 për $x \in]-1; 1[$ funksioni është rritës
 për $x \in]1; +\infty[$ funksioni është zbritës.

b) Shkruani ekuacionin e tangjentes së hequr në pikën ku grafiku pret boshtin e ordnatave.

3 pikë

Pika ku grafiku pret boshtin oy , e ka abshishtë $x = 0$.Ekuacioni i tangjentes ka trajtën: $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$$f(0) = 2 + 3 \cdot 0 - 0^3 = 2$$

$$f'(0) = 3 - 3 \cdot 0^2 = 3$$

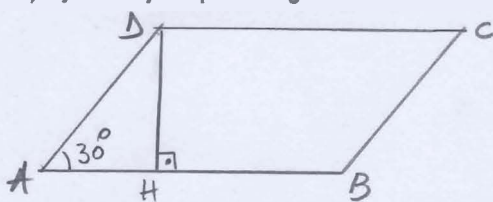
Ekuacioni i tangjentes është: $y - 2 = 3(x - 0)$

$$\boxed{y = 3x + 2}$$

18. Perimetri i një paralelogrami ABCD është 40cm. Këndi A është 30° , kurse lartësia DH mbi AB është 5cm.

a) Gjeni brinjët e paralelogramit.

2 pikë



$$P_{ABCD} = 2(AD + AB) = 40 \Rightarrow AD + AB = 20 \text{ cm}$$

$$\text{Në } \triangle ADH, \quad DH = 5 \text{ cm por } DH = \frac{1}{2}AD, \quad \boxed{AD = 10 \text{ cm}}$$

$$AB = 20 - AD = 20 - 10 = 10 \text{ cm.}$$

b) Ç'mund të thoni për llojin e paralelogramit ABCD.

1 pikë

Në paralelogramin ABCD, $AB = AD = 10 \text{ cm}$.

Pra, brinjët e njëpasnjëshme të tij janë të barabarta.

Prandaj ABCD është rombi.

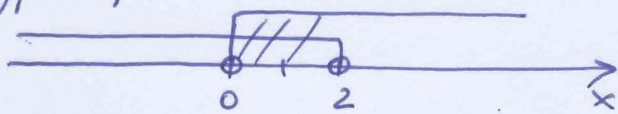
19. Të gjëndet bashkësia e përcaktimit të funksionit $y = \ln x + \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

3 pikë

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge 2-x > 0 \right\} \quad \text{ose} \quad \begin{cases} x > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$$

Zgjidhim sistemin: ① $x > 0 \Rightarrow A =]0; +\infty[$
 ② $2-x > 0 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow x < 2$
 $B =]-\infty; 2[$

Zgjidhja e sistemit është $E = A \cap B$



Bashkësia e përcaktimit është: $E =]0; 2[$

20. Për ç'vlerë të parametrin m drejtëza $y = 3x+m$ është tangjente me elipsin $4x^2 + 5y^2 = 20$.

3 pikë

Kthiejmë ekuacionin e elipsit në trajtë të normuar:

$$\frac{4x^2}{20} + \frac{5y^2}{20} = \frac{20}{20} \Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad a^2 = 5; \quad b^2 = 4$$

Meqë drejtëza $y = 3x+m$ është tangjente me elipsin, ajo duhet të plotësojë kushtin e tangjencës: $a^2 k^2 + b^2 = t^2$

$$5 \cdot 3^2 + 4 = m^2 \Rightarrow m^2 = 49 \Rightarrow m = \pm \sqrt{49} = \pm 7$$

Drejtëza është tangjente me elipsin për $m = 7$
 ose $m = -7$.

21. Të zgjidhet sistemi $\begin{cases} x^2 - 4x \geq 0 \\ 2-x \leq 0 \end{cases}$ në \mathbb{R} .

3 pikë

① $x^2 - 4x \geq 0$
 $x^2 - 4x = 0$
 $x(x-4) = 0$
 $x = 0$ ose $x = 4$

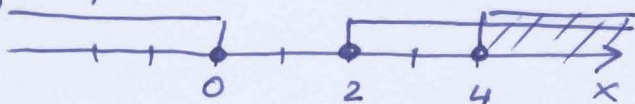
x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
x^2-4x	$+$	0	$-$	$+$
f_n	\vee	\downarrow	\downarrow	\vee

② $2-x \leq 0$
 $-x \leq -2$
 $x \geq 2$

$$A =]-\infty; 0] \cup [4; +\infty[$$

$$B = [2; +\infty[$$

Zgjidhja e sistemit është $E = A \cap B$



$$E = [4; +\infty[$$

22. Për cilat vlera të parametrin m funksioni $y = x^3 + mx^2 + 3x$ është rritës kudo në \mathbb{R} .

3 pikë

Që funksioni të jetë monotoni rritës kudo në \mathbb{R} , duhet që $f'(x) > 0$ për çdo $x \in \mathbb{R}$. Gjejmë $f'(x)$.

$$f'(x) = (x^3 + mx^2 + 3x)' = 3x^2 + 2mx + 3.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2mx + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Megjithatë $f'(x)$ është trinomi i fuqisë të dytë dhe duhet të ruajë kudo në \mathbb{R} shenjen e a-të ($a=3 > 0$) kjo arrihet kur

$$D < 0.$$

$$D = b^2 - 4ac = (2m)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 4m^2 - 36. \quad 4m^2 - 36 < 0$$

$$4m^2 - 36 = 0$$

$$m^2 - 9 = 0$$

$$m^2 = 9$$

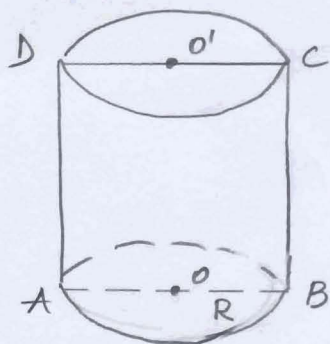
$$m = \pm 3$$

m	$-\infty$	-3	3	$+\infty$	
D	+	0	-	0	+
			√		

Për $m \in]-3; 3[$ funksioni është rritës në \mathbb{R} .

23. Prerja boshtore e cilindrit është katror me syprinë 12 cm^2 . Të gjendet syprina anësore dhe vëllimi i cilindrit.

3 pikë



Prerja boshtore e cilindrit është katrori $ABCD$.

$$S_{ABCD} = 12 \text{ cm}^2 \Rightarrow AB^2 = 12 \Rightarrow AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$R = \frac{1}{2} AB = \sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$\boxed{R = \sqrt{3} \text{ cm}}$$

$$S_a = P \cdot h$$

$$P = 2\pi R = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi \text{ cm}$$

$$h = BC = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$S_a = 2\sqrt{3}\pi \cdot 2\sqrt{3} = 12\pi \text{ cm}^2$$

$$V = S_b \cdot h$$

$$S_b = \pi R^2 = \pi (\sqrt{3})^2 = 3\pi \text{ cm}^2$$

$$V = 3\pi \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$$

24. Në një klasë të përbërë nga 8 vajza dhe 7 djem, zgjidhet rastësisht një grup prej 3 nxënësish. Sa është probabiliteti që në grupin e zgjedhur rastësisht të ketë 2 vajza dhe 1 djalë?

2 pikë

Nga 15 nxënës gjithësej, formohen $C_{15,3}$ grupe me 3 veta.
Pra $n(H) = C_{15,3} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \cancel{12!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{12!}} = 35 \cdot 13 = 455$ grupe

Nga 8 vajza formohen $C_{8,2}$ grupe me 2 vajza

Nga 7 djem formohen $C_{7,1}$ grupe me 1 djalë

$$n(A) = C_{8,2} \cdot C_{7,1} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot \frac{7!}{1! \cdot 6!} = 28 \cdot 7 = 196 \text{ grupe.}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(H)} = \frac{196}{455} = \frac{28}{65}$$

25. Jepen pikat $M(1;4)$; $N(3;2a)$ dhe $K(a;-1)$ si dhe $|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK}| = 13$. Gjeni vlerën e a^{-56} duke ditur se $a > 0$.

3 pikë

$$\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 2a - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a - 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{NK} = \begin{pmatrix} x_K - x_N \\ y_K - y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 3 \\ -1 - 2a \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2a - 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a - 3 \\ -1 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NK}| = \sqrt{(a-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + 25} = 13$$

$$(a-1)^2 + 25 = 13^2$$

$$(a-1)^2 = 169 - 25$$

$$(a-1)^2 = 144 \Rightarrow a-1 = 12 \quad \text{ose} \quad a-1 = -12$$

$$\boxed{a = 13}$$

$$a = -11$$

Shqipë nga kushti $a > 0$, pranohet vlera $a = 13$.