KUJDES! MOS DËMTO BARKODIN

BARKODI

REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

PROVIMI I MATURËS SHTETËRORE 2016

I DETYRUAR

VARIANTI A

E premte, 17 qershor 2016 **Ora 10.00**

Lënda: MATEMATIKË (GJIMNAZI)

Udhëzime për nxënësin

Testi në total ka **25 pyetje**, 13 pyetje me zgjedhje (alternativa) dhe 12 pyetje me zhvillim.
Në pyetjet me zgjedhje rrethoni **vetëm** shkronjën përbri përgjigjes së saktë, ndërsa për pyetjet me zhvillim është dhënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.
Koha për zhvillimin e pyetjeve të testit është **2 orë e 30 minuta**.
Pikët për secilën kërkesë janë dhënë përbri saj.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Kërkesa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Pikët											
Kërkesa	12	13	14a	14b	15a	15b	16	17	18a	18b	19a
Pikët											
Kërkesa	19b	20	21	22a	22b	23	24	25a	25b		
Pikët											

Totali i pikëve

KOMISIONI I VLERËSIMIT

1............................Anëtar

2. ....Anëtar

Për pyetjet 1-13 rrethoni vetëm shkronjën që i përgjigjet alternativës së saktë.

1. Shprehja $\sqrt{a^2}+2a$ për a<0 është identike me: **1 pikë**

A) 0
B) a
C) 2a
D) 3a

2. Gjatësia e vektorit $\vec{m}=6\vec{i}-8\vec{j}$ është: **1 pikë**

A) 2
B) 6
C) 8
D) 10

3. Vlera e shprehjes $2(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ)$ është: **1 pikë**

A) 0
B) 1
C) $\sqrt{3}$
D) 2

4. Jepen bashkësitë $A=]-1;3[$ dhe $B=[0;4[$. Elementi më i vogël i bashkësisë $A\cap B$ është: **1 pikë**

A) –1
B) 0
C) 3
D) 4

5. Vlera e shprehjes $\frac{3^6.3^{-3}}{9}$ është: **1 pikë**

A) 9
B) 3
C) 1
D) 3^{-1}

6. Drejtëza 2x – 3y =4 pret boshtin OX në pikën me abshisë: **1 pikë**

A) -2
B) 1
C) 2
D) 3

7. Cila nga fjalitë e mëposhtëme **NUK** është e vërtetë: **1 pikë**

A) dy trekëndësha kongruentë janë të ngjajshëm
B) dy trekëndësha barabrinjës janë të ngjajshëm
C) dy trekëndësha barabrinjës janë kongruentë
D) dy trekëndësha këndrejtë dybrinjinjishëm janë të ngjashëm

8. Drejtëzat $y=\frac{1}{3}x-1$ dhe $y=mx+2$ janë pingule. Vlera e *m* është: **1 pikë**

A) -3
B) -2
C) -1
D) 3

9. Jepen funksionet $f(x)=x^2-4$ dhe $g(x)=2x$. $f \circ g(1)$ është: **1 pikë**

A) 0
B) 1
C) 2
D) 4

10. Vlera më e madhe e funksionit $y=1-\sin x$ është: **1 pikë**

A) -1
B) 0
C) 1
D) 2

11. Vlera e $\int_0^1 3e^x dx$ është: **1 pikë**

A) 3e
B) 2
C) 3e-3
D) 0

12. Jepet funksioni $f(x)=2x^2-x+3$. Vlera e $f'(1)$ është: **1 pikë**

A) -3
B) 3
C) 4
D) 5

13. $\lim_{x\to 5}\frac{25-x^2}{5-x}$ është: **1 pikë**

A) 10
B) 5
C) 0
D) -10

Pyetjet 14-25 janë me zhvillim dhe me arsyetim.

14. Jepet funksioni $y = \begin{cases} 3x^2 & \text{për } x \geq 0 \\ -x & \text{për } x < 0 \end{cases}$

a) Tregoni që funksioni është i vazhdueshëm në x=0. **2 pikë**

Që funksioni të jetë i vazhdueshëm në $x=0$, duhet të plotesohen njeherazi 3 kushte:

1) të $\exists f(0)$: $f(0) = 3\cdot 0^2 = 0$

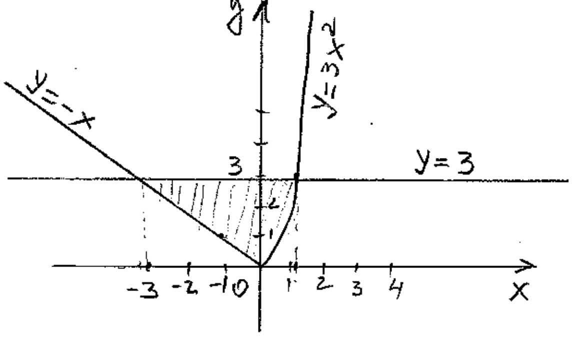
2) të $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ d.m.th. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 3x^2 = 3\cdot 0^2 = 0$ $\Big\}$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

3) duhet që $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$: shohim që $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

Pergjigje: Funksioni eshtë i vazhdueshëm në $x=0$

b) Gjej sipërfaqen e figurës së kufizuar nga grafiku i këtij funksioni dhe drejtëza me ekuacion y=3. **3 pikë**



a) Skicojmë grafikun e funksionit

për $x \geq 0$, $y = 3x^2$ (Parabolë)

x	0	1	2
y	0	3	12

për $x < 0$, $y = -x$ (Drejtëz)

x	-1	(0^-)
y	1	(0^+)

b) kufijtë:

- kufiri i majtë $\begin{cases} y=-x \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow -x = 3$ $\boxed{x=-3}$ - kufiri i djathtë $\begin{cases} y=3x^2 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 = 3$, $x^2 = 1$, $\boxed{x=1}$

c) $S = \int_{-3}^{0} [3-(-x)]\,dx + \int_{0}^{1} (3-3x^2)\,dx =$

$= \int_{-3}^{0} (3+x)\,dx + \int_{0}^{1} (3-3x^2)\,dx = \left(3x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{0} + \left(3x - \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}\right)\Big|_{0}^{1} =$

$= 0 - \left(-9 + \frac{9}{2}\right) + (3-1) - 0 = 9 - \frac{9}{2} + 2 = 11 - \frac{9}{2} = \frac{22-9}{2} =$

$= \frac{13}{2} = 6{,}5$ njësi katrore.

15. Jepet funksioni $y = x^3+6x^2-1$

a) Studioni monotoninë e funksionit. **2 pikë**

Për të studiuar monotoninë e funksionit, studiojmë shenjën e derivatit të parë në $B_p = R$.

$y' = (x^3+6x^2-1)' = 3x^2+12x$

$y' = 0 \Rightarrow 3x^2+12x = 0 \Rightarrow 3x(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 3x=0 \\ x=0 \end{matrix}$ ose $\begin{matrix} x+4=0 \\ x=-4 \end{matrix}$

x	$-\infty$	-4		0	$+\infty$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	max	↘	min	↗

Për $x \in]-\infty; -4[$ $f(x)$ monoton rritës

Për $x \in]-4; 0[$ $f(x)$ monoton zbritës

Për $x \in]0; +\infty[$ $f(x)$ monoton rritës

b) Trego ekzistencën e rrënjës së ekuacionit f(x)= 0 në segmentin [−2;0]. **2 pikë**

Shqyrtojmë funksionin $f(x) = x^3+6x^2-1$ në segmentin $[-2; 0]$

ky funksion është i vazhdueshëm në këtë segment (si polinom)

dhe merr në skajet e tij vlera me shenja të kundërta

$f(-2) = (-2)^3 + 6\cdot(-2)^2 - 1 = -8 + 24 - 1 = 15 \Rightarrow f(-2) > 0$

$f(0) = 0^3 + 6\cdot 0^2 - 1 = -1 \Rightarrow f(0) = -1 < 0$

Në bazë të teoremës, ekziston të paktën një pikë $c \in]-2; 0[$ e tillë që $f(c) = 0$, pra $c^3 + 6\cdot c^2 - 1 = 0$ duhet $\boxed{x=c}$ është rrënjë e ekuacionit $f(x) = 0$.

16. Bashkësia e përcaktimit të funksionit $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{16-x^2}}$ është: **3 pikë**

$E = \{ x \in R \,/\, x-3 \geq 0 \ \wedge\ 16-x^2 > 0 \}$ ose $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 16-x^2 > 0 \end{cases}$

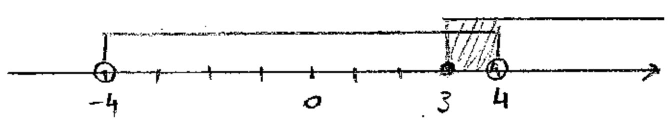
1. $x - 3 \geq 0$
   $x \geq 3$
   $A = [3; +\infty[$

2. $16 - x^2 > 0$
   $16 - x^2 = 0$
   $x = \pm 4$

x	$-\infty$	-4		4	$+\infty$
$16-x^2$	−	0	+	0	−
			V		

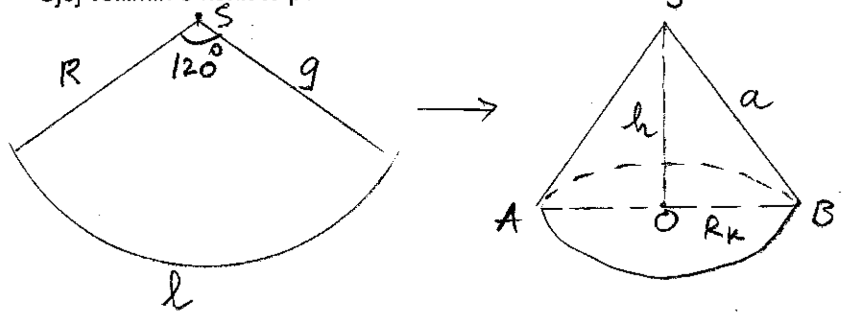
$B =]-4; 4[$

$E = A \cap B$



$E = [3; 4[$

17. Një sektor qarku me rreze 9cm dhe kënd qëndror 120⁰ "mbështillet" dhe formohet një kon rrethor i drejtë.
Gjej vëllimin e konit të përftuar. **3 pikë**



$V_k = \frac{1}{3} S_b \cdot h$

$S_b = \pi R_k^2$

$P_{b.k.} = 2\pi R_k$

Gjatësia e harkut të sektorit qarkor, që i përgjigjet këndit n°:

$l = \frac{\pi \cdot R \cdot n^\circ}{180^\circ} \Rightarrow l = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 120^\circ}{180^\circ} = 6\pi$. Por $P_{b.k} = l = 6\pi$ sepse

Perimetri i bazës së konit është sa gjatësia e harkut l:

$2\pi R_k = 6\pi \Rightarrow R_k = 3$ cm. $S_{b.k} = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$ cm^2

Rrezja e sektorit të qarkut është sa përftuesja e konit: $a = 9$cm

Në Δ këndrejtë SOB kemi: $h^2 = a^2 - R_k^2 = 9^2 - 3^2 = 72 \Rightarrow h = \sqrt{72}$

$h = 6\sqrt{2}$ cm.

$V = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}}\pi \cdot 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}\,\pi$ cm^3

18. Jepet vargu me kufizë të përgjithshme $y_n = 3n + 6$, për $n \in N$

a) Tregoni që ky varg formon progresion aritmetik. **2 pikë**

Që vargu y_n $(n \in N)$ të formojë progresion aritmetik duhet dhe mjafton që $y_{n+1} - y_n = d$ (d-konstante) $\forall n \in N$.

$y_{n+1} = 3(n+1) + 6 = 3n + 3 + 6 = 3n + 9$

Njehsojmë ndryshesën: $y_{n+1} - y_n = 3n + 9 - (3n + 6) =$

$= 3n + 9 - 3n - 6 = 3$

Përgjigje: Vargu i dhënë formon P. A. me diferencë $d = 3$.

b) A është numri 33 kufizë e këtij vargu? Argumento përgjigjen. **1 pikë**

Që numri 33 të jetë kufizë e vargut, duhet që:

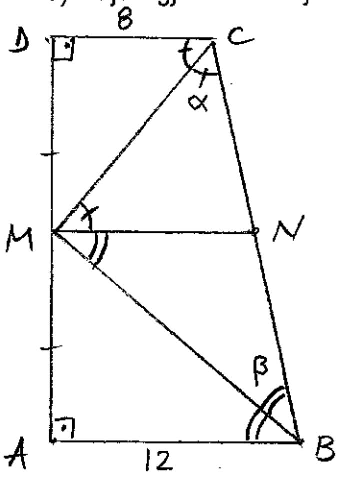
të ekzistojë një $n \in N$ / $y_n = 33$

Pra $33 = 3n + 6 \Rightarrow 3n = 27 \Rightarrow n = 9$

Pra $\boxed{y_9 = 33}$

19. Jepet trapezi këndrejtë ABCD me kënde të drejta në A dhe D dhe baza AB=12cm, DC=8cm. Përgjysmoret e këndeve jo të drejta priten në mesin e brinjës anësore AD.

a) Gjeni gjatësinë e vijës së mesme të trapezit. **1 pikë**



Ndërtojmë $MN \parallel AB$ ku M mesi AD

MN vijë e mesme e trapezit:

$MN \parallel AB \parallel DC$

$MN = \frac{AB + DC}{2} = \frac{12+8}{2} = 10$ cm.

b) Gjeni gjatësinë e brinjës anësore BC. **2 pikë**

Shenojmë $\hat{C} = 2\alpha$ dhe $\hat{B} = 2\beta$

Megë $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ si kënde shtuese, kemi $\alpha + \beta = 90^\circ$

Pra $C\hat{M}B = 90^\circ$ në ΔCMB.

Në këtë Δ këndrejtë MN eshtë mesore dhe BC hipotenuzë

prandaj $BC = 2 \cdot MN = 2 \cdot 10 = 20$ cm.

20. Në një kuti ndodhen 5 etiketa të shënuara me numrat 1;2;3:4;5. Nxirren rastësisht dy etiketa njëra pas tjetrës. Sa është probabiliteti që çifti i nxjerrë të plotësojë kushtin: "numri i etiketës së parë të jetë më i vogël se numri i etiketës së dytë"? **2 pikë**

Nga kutia mund të nxjerrim gjithsej $\boxed{5 \mid 4} = 5 \cdot 4 = 20$

çifte të mundshme etiketash. Pra $n(H) = 20$

Ngjarja A përbëhet nga $\{(x;y) \,/\, x < y\}$

$A = \{(1;2)\ (1;3)\ (1;4)\ (1;5)\ (2;3)\ (2;4)\ (2;5)\ (3;4)\ (3;5)\ (4;5)\}$

$n(A) = 10$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(H)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

21. Mesatarja arithmetike e 7 numrave të çfarëdoshëm është 7. Nëse hiqet njëri prej tyre, mesatarja aritmetike e numrave të mbetur është përsëri 7. Gjeni numrin e hequr. **2 pikë**

$$m_1 = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_7}{7} = 7 \implies x_1+x_2+\cdots+x_7 = 49$$

$$m_2 = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_6}{6} = 7 \implies x_1+x_2+\cdots+x_6 = 42$$

$$x_7 = 49-42 = 7$$

Përgjigje: Numri i hequr është numri 7.

22. Jepet elipsi me ekuacion $8x^2+9y^2=72$

a) Gjeni largesën vatrore. **1 pikë**

Trajta e rregullt e ekuacionit të elipsit është:

$$\frac{8x^2}{72}+\frac{9y^2}{72}=\frac{72}{72}$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$$

Dimë që $c^2=a^2-b^2$

$c^2 = 9-8 = 1 \implies c=\sqrt{1} = 1$

Largesa vatrore është $2c = 2\cdot 1 = 2$ njësi.

b) Gjeni ekuacionin e tangentes ndaj tij, e cila formon me boshtin OX këndin 60^0. **2 pikë**

Ekuacionin e tangjentes e kërkojmë në trajtën $y=kx+t$

Megë $(tgj \wedge ox) = 60^0$, kemi $k_{tgj} = tg60^0 = \sqrt{3}$

Megë drejtëza (tgj) është tangjente ndaj elipsit, ajo plotëson kushtin: $a^2k^2+b^2=t^2$

$9\cdot(\sqrt{3})^2+8 = t^2 \implies 27+8=t^2 \implies t^2=35 \implies t=\pm\sqrt{35}$

Ekuacionet e tangjenteve janë: $y=\sqrt{3}x+\sqrt{35}$

$y=\sqrt{3}x-\sqrt{35}$

23. Të zgjidhet ekuacioni lnx – ln(2-x) = ln7 **3 pikë**

Gjejmë mjedisin ku do të zgjidhet ky ekuacion:

$\begin{cases} x>0 \\ 2-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<2 \end{cases} \quad M_j =]0;2[$

$\ln x - \ln(2-x) = \ln 7 \iff \ln\frac{x}{2-x} = \ln 7 \iff \frac{x}{2-x} = 7$

$\frac{x}{2-x} = 7$

$x = 7(2-x)$

$x = 14 - 7x$

$8x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$

Vemë re se numri $\frac{7}{4} \in]0;2[$ prandaj numri $\frac{7}{4}$ është zgjidhje.

24. Gjej pikën në grafikun e funksionit $y = 3x^2 - 2x^3$, ku tangentja ka koeficientin këndor më të madh. **3 pikë**

Gjejmë pikën $M(x;y)$ në grafikun e $y = 3x^2 - 2x^3$ ku tangentja ka koeficientin këndor më të madh.

$k_{tg} = f'(x) = 6x - 6x^2$

Formojmë funksionin $K(x) = 6x - 6x^2$. Për këtë funksion gjejmë ku ai merr vlerën më të madhe në R. Studiojmë monotoninë e funksionit $K(x)$.

$K'(x) = 6 - 12x \Rightarrow 6 - 12x = 0 \quad x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$K'(x)$	+	0	−
$K(x)$	↗	max	↘

Meqë funksioni $K(x)$ i vazhdueshëm në R dhe ka në të vetëm një maximum, aty ai merr vlerën më të madhe.

Për $x = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3\cdot\frac{1}{4} - \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{8}_4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Përgjigje: Në pikën $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ koeficienti këndor i tangentes ndaj grafikut të $y = f(x)$ ka vlerën më të madhe.

25. Jepen pikat $M(1;2)$ dhe $N(3;4)$

a) Gjeni ekuacionin e drejtëzës MN **1 pikë**

$$(MN): \quad \frac{x - x_M}{x_N - x_M} = \frac{y - y_M}{y_N - y_M}$$

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{4-2}$$

$$\frac{x-1}{\cancel{2}} = \frac{y-2}{\cancel{2}}$$

$$x - 1 = y - 2 \implies (MN): \boxed{x - y + 1 = 0}$$

b) Gjeni pikën K në boshtin OY e tillë që vektorët $\vec{MK}$ dhe $\vec{NK}$ të kenë gjatësi të barabartë. **2 pikë**

Pika $K(0;y)$ meqë $K \in (Oy)$

$$\vec{MK} = \begin{pmatrix} x_K - x_M \\ y_K - y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{NK} = \begin{pmatrix} x_K - x_N \\ y_K - y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ y-4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{MK}| = \sqrt{(-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{1 + (y-2)^2}$$

$$|\vec{NK}| = \sqrt{(-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{9 + (y-4)^2}$$

$$\sqrt{1 + (y-2)^2} = \sqrt{9 + (y-4)^2}$$

$$1 + \cancel{y^2} - 4y + 4 = 9 + \cancel{y^2} - 8y + 16$$

$$4y = 20$$

$$y = 5$$

Pergjigje: Pika e kerkuar eshtë pika $K(0;5)$