KUJDES! MOS DËMTO BARKODIN

BARKODI

REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

PROVIMI I MATURËS SHTETËRORE 2016

I DETYRUAR

VARIANTI A

E premte, 17 qershor 2016 **Ora 10.00**

Lënda: MATEMATIKË (PROFESIONALE)

Udhëzime për nxënësin

Testi në total ka **25 pyetje**, 13 pyetje me zgjedhje (alternativa) dhe 12 pyetje me zhvillim.
Në pyetjet me zgjedhje rrethoni **vetëm** shkronjën përbri përgjigjes së saktë, ndërsa për pyetjet me zhvillim është dhënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.
Koha për zhvillimin e pyetjeve të testit është **2 orë e 30 minuta**.
Pikët për secilën kërkesë janë dhënë përbri saj.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Kërkesa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Pikët											
Kërkesa	12	13	14	15	16a	16b	17	18	19a	19b	20
Pikët											
Kërkesa	21	22a	22b	23a	23b	24a	24b	25a	25b		
Pikët											

Totali i pikëve

KOMISIONI I VLERËSIMIT

1............................Anëtar

2. ....Anëtar

Për pyetjet 1-13 rrethoni vetëm shkronjën që i përgjigjet alternativës së saktë.

1. Jepet funksioni f(x)=sin3x. Vlera e $f'(0)$ është: **1 pikë**

A) –3
B) 3
C) 4
D) 5

2. Shprehja identike e shprehjes $\frac{x^2-4}{x+2}$ për $x \neq -2$ është: **1 pikë**

A) x+2
B) x–2
C) x–4
D) x

3. Rrënja e ekuacionit $\sqrt[3]{x}=2$ është: **1 pikë**

A) 8
B) 16
C) $\sqrt[3]{2}$
D) $\frac{2}{3}$

4. Vlera e shprehjes $\left(\frac{1}{3^2}\right)^{-1}$ është: **1 pikë**

A) 9
B) 3
C) 3^{-2}
D) 3^{-1}

5. Numri i elementëve të bashkësisë $A=\{x \in Z / -2 \leq x < 1\}$ është: **1 pikë**

A) 4
B) 3
C) 2
D) 1

6. Sipërfaqja e qarkut është 144π cm^2. Rrezja e rrethit në *cm* është: **1 pikë**

A) 22
B) 12π
C) 24π
D) 12

7. Pozicioni reciprok i drejtëzave $x-2y+1=0$ dhe $3x-6y+7=0$ është: **1 pikë**

A) paralele
B) priten
C) puthiten
D) pingule

8. Jepet funksioni $f(x)=\frac{x-3}{3}$. Vlera e f(6) është: **1 pikë**

A) 6
B) 3
C) 1
D) 0

9. Jepet $\log_2 a=3$. Vlera e $\log_2 \frac{16}{a}$ është: **1 pikë**

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3

10. Prodhimi i rrënjëve të ekuacionit $x^2-5x+3=0$ është: **1 pikë**

A) -5
B) -3
C) 3
D) 5

11. Këndi x është i tillë që $tgx<0$ dhe $cosx>0$. Këndi x është kënd i kuadrantit të: **1 pikë**

A) IV
B) III
C) II
D) I

12. Inekuacioni $8-x<-3x$ është i njëvlershëm me: **1 pikë**

A) $x>4$
B) $x<-4$
C) $x<5$
D) $x>5$

13. Mesatarja aritmetike e numrave $x+2$ dhe $2x$ është 2.5. Vlera e x është: **1 pikë**

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4

Pyetjet 14-25 janë me zhvillim dhe me arsyetim.

14. Të thjeshtohet thyesa: $\dfrac{ax^2-2x^2}{2ax-4x}$. **2 pikë**

$$\frac{ax^2-2x^2}{2ax-4x}=\frac{x^{\cancel{2}}\cancel{(a-2)}}{2\cancel{x}\cancel{(a-2)}}=\frac{x}{2}$$ me kusht që $\begin{cases} a\neq 2 \\ x\neq 0 \end{cases}$

15. Të zgjidhet inekuacioni $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-6}\leq 16^x$. **3 pikë**

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-6}\leq 16^x$$

$$(2^{-1})^{2x-6}\leq (2^4)^x$$

$$2^{-2x+6}\leq 2^{4x}$$ Megë baza $a=2>1$ funksioni eksponencial është rritës, kemi:

$$\Updownarrow$$

$$-2x+6\leq 4x$$

$$-2x-4x\leq -6$$

$$-6x\leq -6$$

$$x\geq 1$$

Përgjigje: Bashkësia e zgjidhjeve është $A=[1;+\infty[$

16. Jepet hiperbola me ekuacion $4x^2 - 9y^2 = 36$.

a) Të gjëndet ekuacioni i asimptotave. **2 pikë**

Trajta e rregullt e ekuacionit të hiperbolës është:

$$\frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$a^2 = 9 \longrightarrow a = 3$$

$$b^2 = 4 \longrightarrow b = 2$$

Ekuacionet e asimptotave të hiperbolës kanë trajtën: $\boxed{y = \pm \frac{b}{a} x \quad y = \pm \frac{2}{3} x}$

b) Të gjendet ekuacioni i tangentes së hequr ndaj hiperbolës që është paralele me drejtëzën 3x–2y+7=0 **2 pikë**

Ekuacioni i tangjentes ka trajtën: $y = kx + t$

Meqë tangjentja është paralele me drejtëzën e dhënë kemi $k_{tg} = k_d$ $(d): 3x - 2y + 7 = 0$

$$k_d = \frac{3}{2}$$

$$k_{tg} = \frac{3}{2}$$

Nga kushti i tangjencës gjejmë vlerën e t-së:

$$a^2k^2 - b^2 = t^2$$

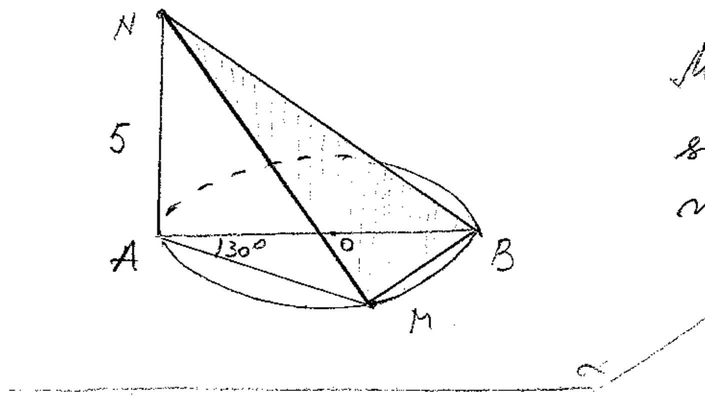
$$9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 = t^2$$

$$9 \cdot \frac{9}{4} - 4 = t^2$$

$$t^2 = \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = \frac{65}{4} \Longrightarrow t = \pm\sqrt{\frac{65}{4}} = \pm\frac{\sqrt{65}}{2}$$

Ekuacionet e tangjenteve janë: $\boxed{y = \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{65}}{2} \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{65}}{2}}$

17. Në planin α ndodhet rrethi me diametër AB=10cm. M është një pikë e rrethit e tillë që këndi MAB =30°. $AN \perp \alpha$ dhe AN=5cm. Gjeni sipërfaqen e trekëndëshit NMB. **3 pikë**



Meqë M pikë e rrethit, $\hat{AMB} = 90°$, si kënd rrethor i mbështetur mbi diametër AB.

$NA \perp \alpha$
NM e pjerrët me planin α
AM = projeksion i NM mbi α
$AM \perp MB$

Nga T^e $3\perp \Rightarrow NM \perp MB \Rightarrow \triangle NMB$ ∟

$$S_{NMB} = \frac{NM \cdot MB}{2}$$

Në $\triangle$∟AMB, $MB = \frac{1}{2}AB = 5$ cm.; $AM = AB \cdot \cos 30° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm.

Në $\triangle$∟ NAM kemi: $NM^2 = NA^2 + AM^2$ $NM^2 = 5^2 + (5\sqrt{3})^2 = 25 + 75 = 100$

$NM = 10$ cm.

$$S_{NMB} = \frac{10\text{ cm} \cdot 5\text{ cm}}{2} = 25\text{ cm}^2$$

18. Jepet $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, ku $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$. Gjeni $\sin 2\alpha$. **2 pikë**

Vemë re se këndi $\alpha \in k\,\underline{II}$, kështu $\begin{cases} \sin\alpha > 0 \\ \cos\alpha < 0 \end{cases}$

Dimë se $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

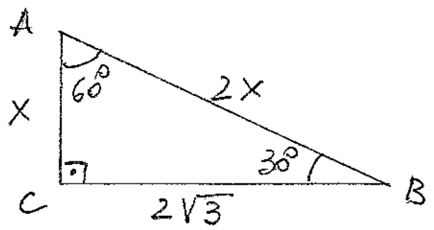
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{9-1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{-4\sqrt{2}}{9}$$

19. Brinjët e një trekëndëshi kënddrejtë janë x; 2x dhe $2\sqrt{3}$, ku $x>\sqrt{3}$.

a) Gjeni këndet e trekëndëshit **1 pikë**



Nga kushti $x > \sqrt{3}$

$2x > 2\sqrt{3}$

Pra $2x$ është hipotenuzë e Δ

Meqë njëri kateti është sa gjysma e hipotenuzës, këndi përballë tij është 30°, kështu që këndi tjetër është 60°.

Përgjigje: Këndet e trekëndëshit janë:

$\hat{C} = 90^\circ$; $\hat{B} = 30^\circ$; $\hat{A} = 60^\circ$.

b) Gjeni sipërfaqen e trekëndëshit **2 pikë**

Meqë trekëndëshi ABC është kënddrejtë në C, kemi:

$$S_\Delta = \frac{AC \cdot CB}{2}$$

Zbatojmë T^e e Pitagorës:

$$(2x)^2 = x^2 + (2\sqrt{3})^2$$

$$4x^2 = x^2 + 12$$

$$3x^2 = 12$$

$$x^2 = 4$$

$\boxed{x = 2}$ kështu: $AC = 2$ cm $BC = 2\sqrt{3}$ $AB = 4$ cm.

$$S_\Delta = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ cm^2$$

20. Jepet funksioni i përcaktuar në [0;+∞[i tillë që $f(x)=\begin{cases} 4x^2 & \text{për } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{A}{x} & \text{për } x > \frac{1}{2} \end{cases}$.

Për ç'vlerë të koeficientit A funksioni është i vazhdueshëm në $x=\frac{1}{2}$? **3 pikë**

Që funksioni të jetë i vazhdueshëm në $x=\frac{1}{2}$ duhet të plotësojë kushtin $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = f(\frac{1}{2})$

1. $f(\frac{1}{2}) = 4\cdot(\frac{1}{2})^2 = 4\cdot\frac{1}{4} = 1$

2. $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} 4x^2 = 4\cdot(\frac{1}{2})^2 = 4\cdot\frac{1}{4} = 1 \\ \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{A}{x} = \frac{A}{\frac{1}{2}} = A\cdot\frac{2}{1} = 2A \end{cases}$

Që të ekzistojë $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ duhet që $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$

3. Pra $2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

Përgjigje: Për $A=\frac{1}{2}$ funksioni është i vazhdueshëm në $x=\frac{1}{2}$.

21. Në progresionin arithmetik me 10 kufiza, kufiza e pare është 7 dhe e fundit është 88.
Gjeni diferencën **d** dhe shumën e 10 kufizave të para të progresionit. **2 pikë**

$y_1 = 7 \quad y_{10} = 88 \quad d=? \quad S_{10}=?$

Dimë që: $y_n = y_1 + (n-1)d$

$y_{10} = y_1 + 9\cdot d$

$88 = 7 + 9\cdot d$

$9d = 81 \Rightarrow \boxed{d = 9}$

$S_n = \frac{(y_1 + y_n)\cdot n}{2} \Rightarrow S_{10} = \frac{(7+88)\cdot \cancel{10}^{5}}{\cancel{2}}$

$S_{10} = 95\cdot 5$

$\boxed{S_{10} = 475}$

22. Jepet funksioni $f(x)=x(1-\frac{1}{3}x^2)$

a) Studioni monotoninë dhe gjeni ekstremumet. **3 pikë**

Për të studiuar monotoninë e funksionit, studiojmë shenjën e derivatit të parë të tij në $D_f = R$

$f(x) = x(1-\frac{1}{3}x^2) = x - \frac{1}{3}x^3$

$f'(x) = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]' = 1 - \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = 1 - x^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	

Për $x \in]-\infty; -1[$ $f(x)$ monoton zbritës

Për $x \in]-1; 1[$ $f(x)$ monoton rritës

Për $x \in]1; +\infty[$ $f(x)$ monoton zbritës

Për $x = -1$ funksioni arrin minimum: $f(-1) = -1 - \frac{1}{3}(-1)^3 = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

Për $x = 1$ $f(x)$ arrin maksimum: $f(1) = 1 - \frac{1}{3}1^3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Ekstremumet e $f(x)$ janë: $Min(-1; -\frac{2}{3})$ $Max(1; \frac{2}{3})$

b) Gjeni pikën e infleksionit për grafikun e funksionit. **1 pikë**

$f''(x) = (1-x^2)' = -2x$

$f''(x) = 0 \Rightarrow -2x = 0$

$x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			p.i.		

për $x \in]-\infty; 0[$ grafiku i luget

për $x \in]0; +\infty[$ grafiku i myset

në $x = 0$ funksioni ka pikë infleksioni

$f(0) = 0(1 - \frac{1}{3}0^2) = 0$ $P(0; 0)$

Përgjigje: Pika $P(0; 0)$ është pikë infleksioni.

23. Jepen shifrat 3;5;7;8;9.

a) Sa numra 4 shifrorë formohen me këto shifra pa përsëritjen e shifrave **1 pikë**

Numri 4-shifror eshtë një radhitje e katër shifrave pa përsëritjen e tyre, prandaj gjithsej formohen:

$\boxed{5}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2} = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 120$ numra gjithsej formohen.

b) Zgjidhet rastësisht njëri prej tyre, sa është probabiliteti që numri i zgjedhur të jetë më i madh se 7000.

2 pikë

Hapesira e rezultateve $n(H) = 120$.

Që numri të jetë më i madh se 7000 duhet të fillojë me 7, 8 ose 9.

Prandaj kemi: $\boxed{3}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2} = 3\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 72$

$n(A) = 72$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(H)}$$

$$P(A) = \frac{72}{120} = \frac{3}{5}$$

24.

a) Të gjëndet bashkësia e përcaktimit të funksionit $y=\log(9-x^2)$. **2 pikë**

$E = \{ x \in R \,/\, 9 - x^2 > 0 \}$

$9 - x^2 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$9-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
>0				$\checkmark$			

$E =]-3; 3[$

b) Të gjendet vlera më e madhe e këtij funksioni. **3 pikë**

Gjejmë ekstremumet e këtij funksioni për x në intervalin $]-3; 3[$.

$$y' = [\log(9-x^2)]' = \frac{(9-x^2)'}{(9-x^2)\ln 10} = \frac{-2x}{(9-x^2)\ln 10}$$

Meqë $9 - x^2 > 0$ në intervalin $]-3; 3[$ dhe $\ln 10 > 0$, shenja e y' varet nga shenja e binomit $(-2x)$

$-2x = 0$

$x = 0$

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
y'			$+$	0	$-$		
y			$\nearrow$	max	$\searrow$		

$f(0) = \log(9-0)$

$f(0) = \log 9$

Meqë funksioni $y = \log(9-x^2)$, i vazhdueshëm në $]-3,3[$ dhe ka vetëm një ekstremum në këtë interval (Maksimum) atëherë, ai merr vlerën më të madhe në pikën e max. Pra $V_M = f(0) = \log 9$. Pra për $x \in]-3;3[$, $f(x) \leq \log 9$.

25. Jepen pikat A(–2 ;0) dhe B(4; –6).

a) Gjeni koordinatat e mesit të segmentit AB **1 pikë**

Shenojmë me $M(x;y)$ mesin e $[AB]$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+(-6)}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Pra $M(1;-3)$

b) Gjeni ekuacionin e përmesores së segmentit. **2 pikë**

Përmesore e segmentit është drejtëza që kalon nga mesi i segmentit dhe është pingul me të.

Ekuacioni i drejtëzes (AB): $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$

$$(AB): \frac{x+2}{4+2} = \frac{y-0}{-6-0}$$

$$-6(x+2) = 6 \cdot y$$

$$-x - 2 = y$$

$$\boxed{y = -x - 2} \Rightarrow k_{AB} = -1$$

Ekuacioni i përmesores është: $y - y_M = k(x - x_M)$

$$k = \frac{-1}{k_{AB}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y - (-3) = 1(x-1)$$

$$y + 3 = x - 1$$

$$\boxed{y = x - 4}$$