REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT DHE E SHKENCËS
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Klasa 9 **Faza e dytë** **Viti mësimor 2011-2012**

1. Një klasë ka 28 nxënës. Nga këta 18 merren me not, 8 me futboll, kurse 7 nxënës merren me të dy llojet e sporteve. Sa nxënës nuk merren as me futboll dhe as me not?

ZGJIDHJE

Nxënës që merren vetëm me not janë 18-7=11.
Nxënës që merren vetëm me futboll janë 8-7=1.
Nxënës që merren me not dhe futboll janë 11+1+7=25.
Nxënës që nuk merren me këto dy lloj sportesh janë 28-25=3.
Nxënësi duhet t'i paraqesë bashkësitë me diagrama të Venit.

2. Ndërtoni grafikun e funksionit y=$\frac{\sqrt{x^2}}{x}$.

ZGJIDHJE

Funksioni paraqitet y=$\begin{cases} 1 \quad për \quad x>0 \\ -1 \quad për \quad x<0 \end{cases}$. Pra grafiku paraqitet si dy gjysmë drejtëza.
Nxënësi duhet të ndërtojë grafikun.

3. Përcaktoni koeficientët a,b dhe c në mënyrë që grafiku i funksionit y = ax^2 +bx+c, x$\in$R të kalojë nga pikat A (-1,100) B (2, -2) dhe C (4,0).

ZGJIDHJE

Meqënëse pikat A,B,C ndodhen në grafik, koordinatat e tyre vërtetojnë barazimet:
$\begin{cases} 100 = a - b + c \\ -2 = 4a + 2b + c \\ 0 = 16a + 4b + c \end{cases}$. Duke zgjidhur sistemin marrim a = -75; b = 41 dhe c = 66.

4. Në trapezin dybrinjënjëshëm diagonalet janë pingule.Vërtetoni që lartësia dhe vija e mesme e tij janë kongruente.

ZGJIDHJE

Në trapezin ABCD (AB paralel me CD) heqim diagonalet AC dhe BD, të cilat priten në pikën O. Trekëndëshat AOB dhe COD janë këndrejtë dybrinjënjëshëm. Lartësitë mbi hipotenuzat e tyre janë sa gjysmat e bazave. Kështu që lartësia e trapezit është sa gjysmëshuma e bazave pra, sa vija e mesme e trapezit. Nxënësi duhet të skicojë figurën.

5. Thjeshtoni thyesën: $\frac{y^2-4}{y^2+y-6}$

ZGJIDHJE
Numëruesi zbërthehet (y-2)(y+2), ndërsa emruesi (y+3)(y-2). Kështu që thyesa mbas thjeshtimit del $\frac{y+2}{y+3}$.

6. Për ç'vlera të *m* shprehja $\sqrt{x^2 - mx + 1}$ ka kuptim për çdo $x \in R$

ZGJIDHJE
Që shprehja të ketë kuptim për çdo $x \in R$ duhet që x^2-mx+1 të jetë ≥ 0 për çdo $x \in R$. Kjo gjë arrihet kur D<0, pra kur m^2-4<0, pra -2<m<2.

7. Jepet ekuacioni $x^2 + (m-1)x + a - m = 0$. Për ç'vlera të *a* dhe *m* ky ekuacion ka dy rrënjë të kundërta?

ZGJIDHJE
Për të patur dy rrënjë të kundërta duhet që $\begin{cases} m-1=0 \\ a-m<0 \end{cases}$. Pra $\begin{cases} m=1 \\ a-1<0 \end{cases}$ ose për m=1 dhe a<1.

8. Përmasat e një drejtkëndëshi janë zmadhuar përkatësisht me 25% dhe 4% secila. Me sa përqind është zmadhuar syprina e drejtkëndëshit?

ZGJIDHJE
Shënojmë përmasat e drejtkëndëshit *a* dhe *b*. Përmasat e reja bëhen 1,25*a* dhe 1,04*b*. Syprina në fillim është *a.b*, ndërsa pas rritjes së përmasave bëhet 1,3*a.b*. Pra syprina është rritur me 0,3 ose 30%.

9, Jepet a<1<b. Thjeshtoni shprehjen $|a-b| + \sqrt{b^2 - 2b + 1} - \sqrt{a^2 - 2a + 1}$.

ZGJIDHJE
Për kushtin e dhënë $|a-b|$=b-a; $\sqrt{b^2 - 2b + 1} = \sqrt{(b-1)^2}$ =b-1; $\sqrt{a^2 - 2a + 1}$ =1 - a.
Përfundimisht shprehja del 2b.

10. Dy çiklistë nisen njëkohësisht, njëri nga qyteti A dhe tjetri nga qyteti B në drejtim të njëritjetrit. Pas takimit të tyre, çiklisti që niset nga A mbërrin në B për 16 minuta, kurse tjetri mbërrin në A për 9 minuta. Për sa minuta e bën rrugën secili çiklist?

ZGJIDHJE
A C B

Shënojmë x shpejtësinë e çiklistit që niset nga A. Y shpejtësia e çiklistit që niset nga B. Shënojmë me t koha e udhëtimit deri në pikën e takimit.

Formojmë sistemin $\begin{cases} 16x = ty \\ 9y = tx \end{cases}$ ose $\begin{cases} \frac{16}{9} = \frac{y^2}{x^2} \\ 16x = ty \end{cases}$ ose $\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{4}{3} \\ \frac{y}{x} = \frac{16}{t} \end{cases}$, nga del t=12min.

Koha e të parit 12+9=21min, kurse e të dytit 12+16=28 min.

REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT DHE E SHKENCËS
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Klasa 10 **Faza e dytë** **Viti mësimor 2011-2012**

1. Ndërtoni grafikun e funksionit y=x - $|x|$

ZGJIDHJE

Funksioni paraqitet $\begin{cases} 0 & p\ddot{e}r \quad x>0 \\ 2x & p\ddot{e}r \quad x<0 \end{cases}$

Nxënësi duhet të ndërtojë grafikun

2. Të gjëndet syprina e drejtëkëndëshit me diagonale 20cm dhe kënd ndërmjet diagonaleeve 120^o .

ZGJIDHJE

Në drejtëkëndëshin ABCD diagonalet priten në pikën O. Këndi DOC= 120^o prandaj këndi AOD=60^o . Trekëndëshi AOD është barabrinjës me brinjë 10cm, prandaj syprina e tij është 25 $\sqrt{3}$ cm^2 . Syprina e drejtëkëndëshit është 100 $\sqrt{3}$ cm^2 . Nxënësi duhet të skicojë figurën.

3. Për ç'vlerë të m sistemi $\begin{cases} y = x^2 - x - 1 \\ mx - y = 5 \end{cases}$ ka një zgjidhje të vetme.

ZGJIDHJE

Sistemi merr trajtën $\begin{cases} y = mx - 5 \\ x^2 - (1+m)x + 4 = 0 \end{cases}$. Që sistemi të ketë një zgjidhje duhet ekuacioni i dytë të ketë vetëm një zgjidhje, pra D=0 ose $(1+m)^2$ -16=0, pra për m = 3 ose m = -5

4. Të zgjidfhet ekuacioni $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}} + \sqrt{x-\sqrt{6x-9}} = \sqrt{6}$.

ZGJIDHJE

Shënojmë $\sqrt{6x-9}$ =m. Ekuacioni mer trajtën $\sqrt{x+m} + \sqrt{x-m} = \sqrt{6}$ ose m^2 = $-3x^2$ +24x-36 ose 6x-9=$-3x^2$ +24x-36 ose x^2 -6x+9=0, pra x=3.

5. Përç'vlerë të k rrënjët x_1 dhe x_2 të ekuacionit kx^2-4x+2=0($k \neq 0$) plotësojnë kushtin $\frac{x_1}{x_2}$=1.

ZGJIDHJE

Kushti dotë thotë që ekuacioni ka dy rrënjë të barabarta. Pra duhet D=0, ose 16-8k=0, ose k=2.

6. Të vërtetohet se nëqoftëse 2x+4y=1, atëhere $x^2+y^2 \geq \frac{1}{20}$

ZGJIDHJE

Duhet të provojmë që $x^2+y^2 \geq \frac{1}{20}$, ose $20x^2 + 20y^2 \geq 1$, ose $4x^2 + 16y^2 + 16x^2 + 4y^2 \geq 1$,ose $(2x+4y)^2 - 16xy + 16x^2 + 4y^2 \geq 1$, ose $1 - 16xy + 16x^2 + 4y^2 \geq 1$ ose $(4x-2y)^2 \geq 0$, e cila është e vërtetë.

7. Për cilat vlera të $a \neq 0$ ekuacioni $1+\sin^2 ax = \sin x$ ka një zgjidhje të vetme për $x \in [o, \pi]$

ZGJIDHJE

Meqënëse 1+$\sin^2 ax \geq 1$ dhe $\sin x \leq 1$, ekuacioni ka zgjidhje kur sinx=1, pra x=$\frac{\pi}{2}$ dhe 1+$\sin\frac{\pi}{2}a$=1, ose $\sin\frac{\pi}{2}a$=0, nga del a=0.

8. Të vërtetohet se në se $\begin{cases} x+y+z>0 \\ xy+yz+zx>0 \\ xyz>0 \end{cases}$ atëhere $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ z>0 \end{cases}$

ZGJIDHJE

Supozojmë që $x \leq 0$. Nga relacioni i parë del y+z>0, kurse nga i treti del $yz \leq 0$. Pra kemi $\begin{cases} x(y+z) \leq 0 \\ yz \leq 0 \end{cases}$ ose $xy+xz+yz \leq 0$ (absurditet). Pra x duhet të jetë >0. Njëlloj provohet që y>0 dhe z>0.

9. Tregoni në planin koordinativ bashkësinë e pikave, kordinatat e të cilave plotësojnë kushtin $x^2<y<|x|$.

ZGJIDHJE

Bashkësia e pikave të planit që plotësojnë kushtin është bashkësia e pikave mbi grafikun e parabolës $y=x^2$ dhe poshtë drejtëzave y=x dhe y=-x. Nxënësi duhet të ndërtojë grafikun

10. Të zgjidhet ekuacioni, ln sin(x+$|x|$)=0

ZGJIDHJE

Nga barazimi del sin(x+$|x|$)=1, ose sin 0=1 për x<0 (i cili s'ka zgjidhje), ose sin2x=1 për x>0. Pra $x=2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ dhe $k \in N$.

REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT DHE E SHKENCËS
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Klasa 11 **Faza e dytë** **Viti mësimor 2011-2012**

1. Të zgjidhet ekuacioni $3^{\sqrt{x}+1}+3^{2-\sqrt{x}}=12$.

ZGJIDHJE

Zëvendësojmë $\sqrt{x}$ =t dhe ekuacioni merr trajtën 3^{2t} - 4.3^{t} +3=0. Zëvendësojmë 3^{t} =y dhe kemi y^{2} -4y+3=0, nga del y=3 ose y=1, pra t=1 ose t=0. Përfundimisht x=1 ose x=0.

2.Gjeni bashkësinë e zgjidhjeve të inekuacionit $\log_2|x|<0$.

ZGJIDHJE

Zgjidhje të inekuacionit janë $\begin{cases} x \neq o \\ |x|<1 \end{cases}$, ose bashkësia e zgjidhjeve është $]-1;0[\quad]0;1[$.

3. Në trapezin ABCD (me baza AB e CD) jepen $A=\alpha$ dhe këndi përballë tij C= 2α

Gjeni AB nëse BC=4cm dhe CD=6cm.

ZGJIDHJE

Në trapezin ABCD (AB paralel me CD), heqim CE parallel me AD. Katërkëndëshi AECD është paralekogram. Nga kjo del që këndi CEB = ECB = α . Pra trekëndëshi ECB është dybrinjinjishëm. Kështu që EB=4 dhe AE=6, pra AB=10cm.

Nxënësi duhet të skicojë figurën.

4. Të zgjidhet ekuacioni $\sqrt{\frac{4}{x}-1}+\sqrt{\frac{x}{4}+1}=\sqrt{\frac{8}{x}}$.

ZGJIDHJE

Duke zëvendësuar $\sqrt{\frac{4}{x}}$ = t, ekuacioni merr trajtën ($\sqrt{2}$ -1)t=1, nga del t= $\sqrt{2}$ +1. Më tutje del që

x= $\frac{4}{3+2\sqrt{2}}$.

5.Në trapezin dybrinjënjëshëm ABCD ($AB \,//\, CD$) jepen A=60°, $AB=a$ dhe $AD=b$. Shprehni AC me anë të vektorëve a *dhe* b .

ZGJIDHJE

Në trapezin ABCD (AB parallel me CD) heqim diagonalen AC dhe pingulen DE mbi AB.

Në figurë shohim: $|AE|=\frac{|b|}{2}$. $AE=\frac{|b|}{2}.\frac{a}{|a|}$ (sepse vektori njësi i AB është $i=\frac{a}{|a|}$).

$DC = a - 2AE = a - |b| \cdot \frac{a}{|a|}$. Përfundimisht $AC = b + a - |b| \cdot \frac{a}{|a|}$.

Nxënësi duhet të skicojë figurën.

6. Për cilat vlera të ϕ shuma e katrorëve të rrënjëve të ekuacionit $x^2 + (\sin\phi - 1) - \frac{1}{2}\cos^2\phi = 0$

arrin vlerën më të madhe?

ZGJIDHJE

Prodhimi i rrënjëve $P = -\frac{1}{2}\cos^2\phi$, kurse shuma $S = \sin\phi - 1$. $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 2 - 2\sin\phi$, e cila arrin

vlerën më të madhe për $\sin\phi = -1$, ose $\phi = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ dhe $\phi = 2k\pi + 3\frac{\pi}{2}$.

7. Të zgjidhet ekuacioni $\frac{1}{4}\log x^{2\log x} = \log\sqrt{x}$.

ZGJIDHJE

Ekuacioni transformohet $(\log x)^2 = \log x$, nga del $\log x = 0$, ose $\log x = 1$, pra $x=1$ ose $x=10$.

8. Të vërtetohet se në çdo trekëndësh ka vend mosbarazimi: $\frac{3}{4}p < m_1 + m_2 + m_3 < p$, ku m_1, m_2, m_3 janë mesoret e trekëndëshit dhe p perimetri i tij.

ZGJIDHJE

Ndërtohet trekëndëshi ABC dhe hiqen mesoret e tij që priten në pikën G. Zgjasim nga pika A mesoren m_1 përtej brinjës përballë, edhe njëherë sa gjatësia e saj (në pikën M), dhe shqyrtojmë paralelogramin BACM. Në trekëndëshin ABM kemi $2m_1 < b + c$.

Duke vepruar kështu edhe me mesoret e tjera marrim: $2m_2 < c + a$; $2m_3 < a + b$. Duke i mbledhur anë për anë të tre mosbarazimet del $m_1 + m_2 + m_3 < p$. Duke shqyrtuar trekëndëshat AGB; AGC dhe BGC kemi

$a < \frac{2}{3}m_2 + \frac{2}{3}m_3$; $b < \frac{2}{3}m_1 + \frac{2}{3}m_3$ dhe

$c < \frac{2}{3}m_1 + \frac{2}{3}m_2$. Duke i mbledhur anë për anë kemi $\frac{3}{4}p < m_1 + m_2 + m_3$.

Nxënësi duhet të skicojë figurën.

9.Duke ditur se ka vend barazimi $\mathrm{tg}(\pi\sin x) = 1$,gjeni cosx.($x \in R$).

ZGJIDHJE

$\pi\sin x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, ose $\sin x = k + \frac{1}{4}$. Që ekuacioni të ketë zgjidhje duhet, $k=0$ ose $k=-1$, nga del $\sin x = \frac{1}{4}$ ose $\sin x = -\frac{3}{4}$. Gjeni cosx.

10. Për ç'vlera të m ekuacioni $x^4 - 3x^2 + m - 1 = 0$ ka vetëm 3 rrënjë reale?

Që ekuacioni të ketë 3 rrënjë reale duhet që $c=0$ dhe $b<0$. Pra $m=1$.

REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT DHE E SHKENCËS
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Klasa 12 **Faza e dytë** **Viti mësimor 2011-2012**

1. Të zgjidhet ekuacioni sin2x.sin3x=1
ZGJIDHJE
M.q.s $|\sin\alpha| \leq 1$ ekuacioni ka zgjidhje kur sin2x=sin3x=1, ose sin2x=sin3x=-1, gjë që nuk ndodh, pra ekuacioni nuk ka zgjidhje.

2. Gjeni koeficientët a, b, c të polinomit $P(x)=ax^2+bx+c$, duke ditur që $P(x+1)+P(x-1)=8x^2-6x+10$, për çdo x nga R.

ZGJIDHJE
Barazimi pas zvëndësimeve merr formën $2ax^2+2bx+2a+2b=8x^2-6x+10$, nga del a=4; b=-3 dhe c=1.

3. Gjeni të gjitha çiftet (x;y) që janë zgjidhje të ekuacionit, $\sin\pi xy=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+1$, për x e y $\in[0;2\pi]$.

ZGJIDHJE
Meqënëse ana e djathtë është ≥ 1, që ekuacioni të ketë zgjidhje duhet që $\left(y-\frac{1}{2}\right)=0$, $y=\frac{1}{2}$. Me këtë kusht ekuacioni merr formën $\sin\frac{\pi}{2}x=1$, ose $x=4k\pi+1$.

4. Jepen vijat $x^2+y^2=1 (y>0)$ dhe $y=|x|$. Gjeni syprinën e figurës që kufizohet nga dy vijat.
ZGJIDHJE
Vija e parë është rreth me qëndër në O dhe rreze 1. Vija e dytë është e përbërë nga dy gjysëmdrejtëza y=x dhe y=-x, që janë përgjysmoret e kuadrateve të I dhe të II. Figura e formuar është sa $\frac{1}{4}$ e rrethit.

Pra syprina e figurës është $\frac{1}{4}\pi$. Nxënësi duhet të ndërtojë grafikët.

5. Të vërtetohet se ekuacioni $x^3-10x^2+2x=4$ nuk mund të ketë si zgjidhje asnjë numër natyror tek.
ZGJIDHJE
Për çdo numër natyror tek x^3 është numër tek, $10x^2$ dhe 2x janë numra çift . Pra ana e majtë do të dalë numër tek për çdo numër tek, kurse ana e djathtë është numër çift.(absurditet).

6. Të vërtetohet që për çdo x>0 ka vend mosbarazimi $x-\ln x\geq 1$
ZGJIDHJE
Shqyrtoj funksionin y=x-lnx-1. Derivati i tij është $\frac{x-1}{x}$. Shënja e tij është negative për $x\in\left]0;1\right]$ dhe pozitive për x>1. Pra për x=1 funksioni arrin minimum. Meqënëse funksioni është i vazhdueshëm, vlera më e vogël e tij arrihet për x=1 (që është y=0). Pra $y\geq 0$.
N.q.s nxënësi e zgjidh grafikisht të vlerësohet me 3 pikë.

7. Gjeni vlerën e $C_{n,k}$, ku n=5x dhe k=x^2+6.

ZGJIDHJE

Që të ketë kuptim $C_{n,k}$ duhet që $k \leq n$, pra $x^2+6 \leq 5x$. Kjo ndodh kur $2 \leq x \leq 3$. Meqënëse k dhe $n \in N$ rrjedh që $x \in N$. Pra x=2, ose x=3. Pra çiftet (n;k) janë: (10;10) dhe (15;15).
Vlera e $C_{n,k}=1$.

8. Nëse $a^2+b^2=7ab$ (a>0; b>0) vërtetoni që $\log\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{1}{2}$(loga +logb).

ZGJIDHJE

Nga $a^2+b^2=7ab$ del $(a+b)^2=9ab$, ose $\left(\frac{a+b}{3}\right)^2$=ab, ose $2\log\frac{a+b}{3}$=loga+logb.

9. Provoni që për $x>\frac{1}{4}$ kemi $\log_{4x}2+\log_2 x \geq 0$.

ZGJIDHJE

$\log_{4x}2+\log_2 x=\frac{1}{\log_2 4x}+\log_2 x=\frac{1}{2+\log_2 x}+\log_2 x=\frac{(1+\log_2 x)^2}{2+\log_2 x}$. Numëruesi është ≥ 0. Për $x>\frac{1}{4}$

$\log_2 x>\log_2\frac{1}{4}$, ose $\log_2 x>-2$, ose $\log_2 x+2>0$. Pra edhe emrëesi është >0.

10. Të vërtetohet se për çdo $x \geq 0$ kemi $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}$.

ZGJIDHJE

Shqyrtojmë funksionin y= $e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$. y'= e^x-1-x. y''= e^x-1. Meqënëse $e^x \geq 1$, del që $y'' \geq 0$. Kjo do të thotë që y'(si funksion) është rritës. Mq.s y'(0)=0 del që $y' \geq 0$, nga kjo del që y rritës. Meqënëse y(0)=0 del që $y \geq 0$, pra mosbarazimi u vërtetua.
N.q.s nxënësi e zgjidh grafikisht të vlerësohet me 3 pikë.