REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Viti mësimor 2014-2015 **Faza e tretë** **9 - vjeçare**
koha 3 orë

1. Jepet vargu i pafundëm i numrave $a_1 = 2$; $a_2 = 3$,..., $a_{k+2} = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ për $k \geq 3$. Gjeni a_{2015}

Zgjidhje

Ndërtojmë kufizat e para të vargut:

$$2,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 2,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ ...$$

Vihet re se pas 6 kufizave, ato përsëriten në të njëjtën mënyrë (perioda është 6).

Në këtë mënyrë $a_{2010} = a_6 = \frac{2}{3}$. Më tej shihet që $a_{2015} = \frac{1}{3}$.

2. Shënojmë me M bashkësinë e numrave të plotë të trajtës $x^2 + 5y^2$, ku x dhe y janë numra të plotë. Për shembull numri 1 bën pjesë në M, por numri 2 nuk bën pjesë. Vërtetoni që prodhimi i dy numrave nga M është një numër i bashkësisë M.

Zgjidhje

Mendojmë që $x^2 + 5y^2$ dhe $u^2 + vy^2$ janë nga bashkësia M. Atëherë $(x^2 + 5y^2)(u^2 + vy^2) = x^2 u^2 + 25 y^2 v^2 + 5 x^2 v^2 + 5 y^2 u^2 = (x^2 u^2 + 10 x y u v + 25 y^2 v^2) + 5 (x^2 v^2 - 2 x y u v + y^2 u^2) = (x u + 5 y u)^2 + 5 (x v - y u)^2$ është përsëri në M.

Rruga: Naim Frashëri, Nr. 37, Tiranë
Tel/fax.+355 4 2419257
Web site: www.akp.gov.al

3. A është e mundur të ketë trekëndësh me me secilën brinjë me gjatësi më të vogël se 1cm, por të ketë syprinë më të madhe nga syprina e një trekëndëshi tjetër që ka secilën brinjë me gjatësi jo më të vogël se 100 cm.

Zgjidhje

Po, është e mundur

Marrim trekëndëshin barabrinjës me gjatësi brinje 0,999 cm. Syprina e tij është më e madhe se 0,2. Për trekëndëshin që kërkojmë duhet ta zgjedhim “sa më të ngushtë”. Marrin trekëndëshin dybrinjënjëshëm me gjatësi brinjësh 100 cm, 100 cm dhe 199,999999 cm. Po të kontrollojmë del se ky e plotëson kushtin e vendosur. Lartësia e tij është:

$\sqrt{100^2 - 99{,}9999995^2} < \sqrt{200 \cdot 0{,}0000005} < 0{,}001$

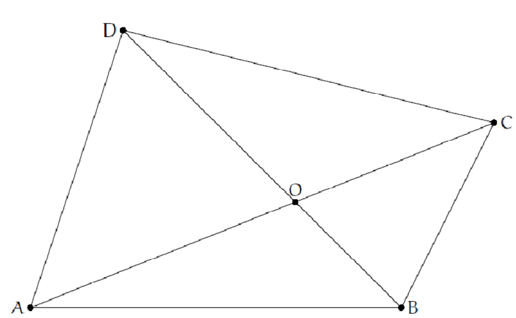
Prandaj syprina e tij është më e vogël se $100 \cdot 0{,}01 = 0{,}1$

4. Jepet katërkëndëshi ABCD i tillë që $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$. Vërtetoni që $AC \perp BD$.

Zgjidhje

$\widehat{AOD} + \widehat{COD} = 180^0$. Shënojmë $\widehat{BOC} = \widehat{AOD} = \alpha \leq 90^0$ dhe $\widehat{AOB} = \widehat{COD} = 180 - \alpha \geq 90^0$. Nga Teorema e Pitagorës janë të vërteta mosbarazimet $AO^2 + DO^2 \geq AD^2$, $BO^2 + CO^2 \geq BC^2$, $BO^2 + DO^2 \leq AB^2$, $CO^2 + DO^2 \leq CD^2$. Barazimi ndodh atëherë dhe vetëm atëherë kur $\alpha = 90^0$. Më tej

$AD^2 + BC^2 \leq (AO^2 + DO^2) + (BO^2 + CO^2) = (AO^2 + BO^2) + (CO^2 + DO^2) \leq AB^2 + CD^2$



Barazimi ndodh atëherë dhe vetëm atëherë kur $\alpha = 90^0$. Meqë $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$ është dhënë, vijmë në përfundimin që $AC \perp BD$

5. Supozojmë që x dhe y janë numra realë që vërtetojnë sistemin e ekuacioneve. Gjeni x – y .

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = 1 \\ 4^x - 4^y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Zgjidhje

Vëmë re se

$$\frac{5}{3} = 4^x - 4^y = (2^x - 2^y)\cdot(2^x + 2^y) = 1\cdot(2^x + 2^y)$$

Më tej

$$2^x = \frac{(2^x + 2^y) + (2^x - 2^y)}{2} = \frac{\frac{5}{3} + 1}{2} = \frac{4}{3}$$

dhe

$$2^y = \frac{(2^x + 2^y) - (2^x - 2^y)}{2} = \frac{\frac{5}{3} - 1}{2} = \frac{1}{3}$$

Duke pjestuar të dy anët marrim:

$$2^{x-y} = \frac{2^x}{2^y} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = 4 \text{ prej nga } 2^{x-y} = 4 = 2^2$$

Nga barazimi i fundit marrim x – y = 2.