



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Viti mësimor 2014-2015

Faza e tretë

Klasa X

koha 3 orë

1. Vërtetoni barazimin $\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{5+2\sqrt{6}} = 1$

Zgjidhje

$$\sqrt[4]{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 \cdot (5+2\sqrt{6})} = 1$$

$$(3-2\sqrt{6}+2)(5+2\sqrt{6}) = 1$$

$$(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6}) = 1$$

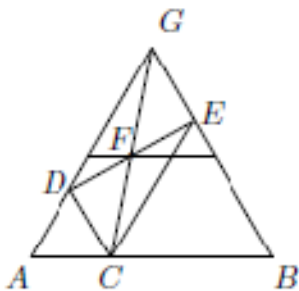
$$25-4 \cdot 6 = 1$$

$$1 = 1$$

2. Jepet segmenti AB dhe një pikë C brenda tij. Në të njëjtën anë të AB (në të njëjtin gjysmëplan) ndërtohen trekëndëshat barabrinjës ADC dhe CEB. Shënojmë F mesin e brinjës DE. Gjenerali bashkësinë e pikave të planit që përshkon pika F, kur pika C lëviz në segmentin AB.

Zgjidhje

Zgjatim AD dhe BE dhe shënojmë G pikën e prerjes së tyre. Katërkëndëshi ECDG është paralelogram dhe pika F është pika e prerjes së diagonaleve (vërtetim). Kur pika C lëviz në AB nga A në B, pika F lëviz nga mesi i brinjës AG për në mesin e BG përgjatë segmentit që lidh këto dy pika. Në bazë të të dhënave të problemit skajet duhen përjashtuar.



Bashkësia e pikave F është vija e mesme e trekëndëshit barabrinjës ABG paralele me AB.

3. Krahasoni numrat 3^{303} me 2^{454}

Zgjidhje

$$3^{303} = 3 \cdot 3^{302} = 3 \cdot 9^{151} > 3 \cdot 8^{151} = 3 \cdot 2^{453} > 2^{454}$$

4. Jepet numri real a . Gjenerali të gjithë numrat realë b , të tillë që për çdo numër real x të paktën njëri prej numrave $x^2 + ax + b$ dhe $x^2 - ax + b$ të jetë jonegativ.

Zgjidhje

$$(x^2 + ax + b) + (x^2 - ax + b) = 2x^2 + 2b$$

Nëse $b \geq 0$, atëherë $2x^2 + 2b \geq 0$ për çdo numër real x . Prej këndeje arrijmë në përfundimin që të paktën njëri prej faktorëve $x^2 + ax + b$ dhe $x^2 - ax + b$ të jetë jonegativ

Nëse $b < 0$, atëherë për $x = 0$, atëherë të dyja shumatat janë negative. Pra, bashkësia e numrave që plotësojnë kushtin është $b \geq 0$.

5. Gjeni të gjithë numrat realë a që ekuacioni $x^3 + ax - 2(a + 4) = 0$ të ketë dy rrënjë të ndryshme reale.

Zgjidhje

$x^3 + ax - 2(a + 4) = (x - 2)(x^2 + 2x + (a + 4))$. Pra $x = 2$ është rrënjë e ekuacionit

$x^3 + ax - 2(a + 4) = 0$. Dallojmë dy raste:

Nëse $x = 2$ është rrënjë e vetme, atëhere $x^2 + 2x + (a + 4)$ duhet të ketë vetëm një rrënjë, dallori 0 , $4 - 4(a + 4) = 0$ jep $a = -3$

Nëse $x = 2$ është rrënjë e dyfishtë, atëhere $x = 2$ duhet të jetë rrënjë e $x^2 + 2x + (a + 4)$, prandaj $2^2 + 2 \cdot 2 + (a + 4) = 0$ që jep $a = -12$. Por meqënëse $x^2 + 2x - 8 \neq (x - 2)^2$ rrënjja tjetër do të jetë e ndryshme nga 2 .

Pra të vetmet mundësi janë $a = -3$ dhe $a = -12$.