REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT

AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Viti mësimor 2014-2015 **Faza e tretë** **klasa XI**

koha 3 orë

1. Jepet vargu $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ në të cilin $a_1 = 1$ dhe $a_n - a_{n-1} = 2(n-1)$, për $n \geq 2$. Vërtetoni që:

a. çdo kufizë e tij është numër tek,
b. çdo kufizë me numër rendor $3k - 1$, $k \in N$ është shumfish i numrit 3,
c. prodhimi i çdo dy kufizave fqinje është kufizë e vargut.

Zgjidhje

a.

Për çdo $n \geq 2$ kemi:

$a_2 - a_1 = 2 \cdot 1$

$a_3 - a_2 = 2 \cdot 2$

....

$a_{n-1} - a_{n-2} = 2(n-2)$

$a_n - a_{n-1} = 2(n-1)$

mbledhim barazimet e mësipërme

$a_n - a_1 = 2(1 + 2 + ... + n - 1)$

....

$a_n = a_1 + n(n - 1)$

$a_n = 1 + n(n - 1)$

a_n është numër tek, pasi $n(n - 1)$ është numër çift.

b.

$a_{3k-1} = 1 + (3k - 1)(3k - 2)$

....

$a_{3k-1} = 3(3k^2 - 3k + 1)$

c.

$a_n \cdot a_{n-1} = [1 + (n - 1)(n - 2)][1 + n(n - 1)] = ... = ...$

2. Jepet katërkëndëshi me syprinë S dhe gjatësi të brinjëve *a,b,c,d*. Vërtetoni se është i vërtetë mosbarazimi $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4S$. Gjeni për cilët katërkëndësha mosbarazimi shndërrohet në barazim.

Zgjidhje

Mund të supozojmë (pa e cënuar përgjithësimin) që a, b, c, d janë gjatësitë e brinjëve të njëpasnjëshme të katërkëndëshit. Diagonalja e ndan katërkëndëshin në dy trekëndësha. Për njërin prej tyre ka vend mosbarazimi $\frac{ab}{2} + \frac{cd}{2} \geq S$ prej nga $ab + cd \geq 2S$. Për trekëndëshin tjetër kemi $\frac{bc}{2} + \frac{da}{2} \geq S$, prej nga $bc + da \geq 2S$. Më tej $ab + bc + cd + da \geq 2S$.

Nga ana tjetër duke mbledhur anë për anë mosbarazimet $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + d^2 \geq 2cd$ dhe $d^2 + a^2 \geq 2da$ marrim $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da$ që na çon në vërtetimin e mosbarazimit.

Barazimi ndodh vetëm kur të gjitha inekuacionet janë barazime. Në inekuacionin e parë ndodh barazimi vetëm kur këndet janë të gjitha të drejta. Në hapin e dytë barazimet ndodhin vetëm kur të gjitha brinjët janë të barabarta.

3. Gjeni të gjitha çiftet *(m;n)*, ku *m* dhe *n* janë numra të plotë, që të jetë i vërtetë mosbarazimi $x^m + y^n \geq x^n \cdot y^m$ për të gjithë numrat realë pozitivë *x* dhe *y*.

Zgjidhje

Nëse m= 0, atëhere inekuacioni $1 + y^n \geq x^n$. Kjo ndodh për të gjithë numrat realë pozitivë x dhe y vetëm nëse n = 0. Prandaj (0;0) është një zgjidhje. Le të mendojmë që m dhe n janë të ndryshme nga 0. Nëse çifti (m;n) i plotëson kushtet, atëhere duke xbritur x dhe y nga 1/x dhe 1/y vërejmë se çiftet (– m;– n) gjithashtu plotësojnë kushtet tona. Mund të supozojmë, pa cënuar zgjidhjen e përgjithshme, që $m \geq n$ dhe $m \geq 0$. Nëse m > n, atëhere duke marrë x = 1 gjejmë $1 + y^n \geq y^m$ i cili nuk është gjithmonë i vërtetë(psh për y shumë të madh). Prandaj m = n. Duke marrë x = y = 4, gjejmë që $2 \cdot 4^m \geq 4^{2m}$, i cili nuk është i vërtete për numrat pozitivë m. Këto janë të vetmet raste që ndodhin e në këtë mënyrë zgjidhja e vetme është (0;0).

4. Vërtetoni se për çdo numër real x mesatarja aritmetike e $\sqrt{1+\sin x}$ dhe $\sqrt{1-\sin x}$ është e barabartë me një prej: $\sin\frac{x}{2}, \cos\frac{x}{2}, -\sin\frac{x}{2}, -\cos\frac{x}{2}$. A mund të heqim ndonjërin prej tyre që pohimi të mbetet përsëri i vërtetë?

Zgjidhje

$$1+\sin x = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2$$

$$1-\sin x = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = (\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2$$

Gjejmë $E(x) = \dfrac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{2} = \dfrac{\left|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right| + \left|\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right|}{2}$

Në varësi të shenjave të faktorëve në numërues një prej funksioneve trigonometrikë eleminohet tjetri dyfishohet, me shenjë pozitive ose negative.

Prandaj E(x) është njëra prej shprehjeve: $\sin\frac{x}{2}, \cos\frac{x}{2}, -\sin\frac{x}{2}, -\cos\frac{x}{2}$.

E(x) = 1 sa herë që x është njëri prej numrave 0, π, 2π, 3π. Megjithatë secila nga këto vlera i takon vetëm një shprehjeje nga $\sin\frac{x}{2}, \cos\frac{x}{2}, -\sin\frac{x}{2}, -\cos\frac{x}{2}$. Pra asnjëra prej tyre nuk mund të hiqet.

5. Gjeni të gjithë treshet *(a;b;c)*, ku *a,b* dhe *c* janë numra natyrorë që formojnë progresion gjeometrik dhe $a + b + c = 111$.

Zgjidhje

I konsiderojmë numrat e kërkuar në trajtën a, ar, ar^2, ku $r = x/y$. Meqënëse $a(x/y)^2$ është numër i plotë, $a = ky^2$, ku k është numër i plotë. Prandaj $k(x^2 + xy + x^2) = 111 = 3 \times 37$ dhe $(y^2 + xy + x^2)$ është njëri nga 3, 37 ose 111. Më poshtë jepet tabela e vlerave të $(y^2 + xy + x^2)$ për $y \le x$, deri te 111.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**3**	7	13	21	31	43	57	73	91	**111**
2		12	19	28	39	52	67	84	103	
3			27	**37**	49	63	79	97		
4				48	61	76	93			
5					75	91				
6						108				

Ne gjejmë zgjidhjet $x = y = 1, k = 37, x = 10, y = 1, k = 1, x = 4, y = 3, k = 3$. Dy zgjidhje të tjera gjenden duke ndërruar x me y. Prandaj treshet e zgjidhjeve janë (37; 37; 37), (1; 10; 100), (100;10:1), (27;36;48), (48;36;27).