REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT

AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Viti mësimor 2014-2015 **Faza e tretë** **Klasa XII**

koha 3 orë

1. Gjeni ekuacionin e rrethit që është tangjent me drejtëzat prerëse $7x - y - 5 = 0$ dhe $x + y + 13 = 0$ dhe me njërën prej tyre tangjent në pikën $M(1;2)$.

Zgjidhje

Meqënse $M(1;2) \in (d)$; $7x - y - 5 = 0$ trgohet që qëndra e rrethit Q ndodhet në drejtëzën pingule me të që kalon nga pika M. Ekuacioni i QM është i formës $x + 7y + c = 0$. Duke zv.koordinatat e pikës gjejmë $c = -15$. Ekuacioni i QM është $x + 7y - 15 = 0$.

Gjejmë koordinatat e Q nga fakti që ajo ndodhet në drejtëzën QM. Pra ka vend $p + 7q - 15 = 0$ dhe $QM_0 = QM = r$, ku M_0 është pika e tangjencës me drejtëzën tjetër....

Gjejmë rrezen...

Shkruajmë ekuacionin e rrethit....

2. Gjeni vlerën më të vogël të mundshme të prodhimit $\left(1+u^2\right)\cdot\left(1+v^2\right)$ ku u dhe v janë numra realë të tillë që $u+v=1$

Zgjidhje

Shënojmë $u=\frac{1}{2}+x$ dhe $v=\frac{1}{2}-x$. Atëherë

S$\left(1+u^2\right)\cdot\left(1+v^2\right) = \left(1+(\frac{1}{2}+x)^2\right)\cdot\left(1+(\frac{1}{2}-x)^2\right)=\left(1+\frac{1}{4}+x^2+x\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}+x^2-x\right)=$

$(\frac{5}{4}+x^2)^2-x^2=\frac{25}{16}+\frac{5}{2}x^2+x^4-x^2=\frac{25}{16}+\frac{3}{2}x^2+x^4$

Meqë $\frac{3}{2}x^2$ dhe x^4 janë të dyja jonegative shuma bëhet minimale kur x = 0.

Kjo na jep $\left(1+u^2\right)\cdot\left(1+v^2\right)=\frac{25}{16}$

3. Gjeni largësinë më të vogël ndëmjet grafikëve të funksioneve $y = e^x$ dhe $y = lnx$

Zgjidhje

Grafikët e funksioneve $y = e^x$ dhe $y = lnx$ janë simetrik në lidhje y = x. Prandaj distanca minimale ndërmjet grafikëve është sa shuma e largësive minimale të secilit prej tyre nga y = x. Distanca e grafikut të $y = e^x$ nga y = x është minimale në pikën që tangjentja ndaj saj është paralele me y = x. Atëhere y' = 1 për funksionin $y = e^x$. Pra e^x = 1 na çon në x = 0 dhe y = 1. Duke arsyetuar njëlloj për degën tjetër të grafikut, arrijmë në përfundimin se distanca minimale është ajo ndërmjet pikave (0;1) dhe (1;0) dhe është $\sqrt{2}$.

4. A ka funksion $f: R \to R$ që plotëson kushtin $f'(x) = f(-x)$, për çdo $x \in R$ (përveç funksionit konstant f(x) = 0)? A ka funksion $f: R \to R$ që plotëson kushtin $f'(x) = f(x-1)$, për çdo $x \in R$ (përveç funksionit konstant f(x) = 0)?

Zgjidhje

Po, ka $f: R \to R$ që plotëson kushtin $f'(x) = f(-x)$. Për shembull $f(x) = \sin x + \cos x$
$f'(x) = \cos x - \sin x = \cos(-x) + \sin(-x) = f(-x)$.

Po, ka funksion $f: R \to R$ që plotëson kushtin $f'(x) = f(x-1)$, për çdo $x \in R$.

Marrim a > 1 të tillë që ln a = a^{-1}. Marrim funksionin $f(x) = a^x$. Gjejmë derivatin e funksionit $f'(x) = a^x \ln a = a^x \cdot a^{-1} = a^{x-1} = f(x-1)$. Mbetet të provojmë që një numër i tillë a > 1 ekziston. Meqë $ln\ 1 = 0 < 1 = 1^{-1}$ dhe $ln\ e = 1 > e^{-1}$, grafikët e funksioneve të vazhdueshme $g(x) = lnx$ dhe $h(x) = x^{-1}$ priten në të njëjtën pikë a > 1. Ky është numri i kërkuar.

5. Gjeni të gjitha funksionet $f: R^+ \to R^+$ të tillë që grafiku i funksionit $y = c \cdot f(x)$, të jetë simetrik me $y = x$ për çdo numër real pozitiv c.

Zgjidhje

Simetriku i grafikut të y = g(x) kundrejt y = x është i njëvlershme me kushtin g(g(x)) = x për çdo numër real x. Pika (x;g(x) ndodhet në grafikun e y = g(x). Nga simetria, edhe pika (g(x),x) ndodhet në grafik. Kjo është e njëvlershme me g(g(x)) = x.

Duke e përdorur këtë për grafikun e funksionit y = c ·f(x), për çdo c > 0 dhe x > 0 kemi c ·f(c·f(x)) = x. (1)

Duke marrë $c = \dfrac{1}{f(x)}$ në barazimin (1) kemi $\dfrac{1}{f(x)} \cdot f(1) = x$, prej ku $f(x) = \dfrac{f(1)}{x}$ për çdo numër real x pozitiv.

Mbetet të provojmë se $f(x)=\frac{a}{x}$, ku a > 0, plotëson kushtet tona. Shqyrtojmë funksionin g ku

$g(x)=c\cdot f(x)=\frac{ca}{x}$ dhe c > 0 .

Më tej $g(g(x))=g\left(\frac{ca}{x}\right)=\frac{ca}{\frac{ca}{x}}=x$, që do të thotë se grafiku i $y=c\cdot f(x)$ është simetrik në lidhje

me y = x.