



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT DHE E SHKENCËS
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Viti mësimor 2012-2013

Faza e tretë

Klasa 10

1. Në trekëndëshin ABC, ($B = 60^\circ$) përgjysmoret AK dhe CE priten në pikën O. Provoni që $OK = OE$.

ZGJIDHJE

Këndi $AOC = 120^\circ =$ këndin EOK. Katërkëndëshit BEOK i jashtëshkruhet një rreth. BO është përgjysmore e këndit B. Nga rrjetth që kordat OE dhe OK janë të barabarta.

2. Zgjidhni ekuacionin $\left(\frac{1}{1 \cdot 101} + \frac{1}{2 \cdot 102} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 110}\right) \cdot x = \frac{1}{1 \cdot 11} + \frac{1}{2 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 110}$

ZGJIDHJE

$$\frac{1}{100} \left(1 - \frac{1}{101} + \frac{1}{2} - \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{110}\right) x = \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{110}\right)$$

Shihe lehtë se shprehjet në kllapa janë të barabarta ,prandaj del $\frac{x}{100} = \frac{1}{10}$; $x=10$.

3. Vërtetoni që nëse shprehja $5x + 2y$ plotpjestohet me 17 atëhere shprehja $9x + 7y$ plotpjestohet me 17.

ZGJIDHJE

$3(9x+7y)=27x+21y=17x+17y+10x+4y=17(x+y)+2(2x+5y)$.M.q.s ana e djathtë plotëpjestohet me 17 atëhere edhe ana e djathtë dotë plotëpjestohet me 17 .M.q.s 3 dhe 17 nuk kanë pjestues të përbashkët rrjedh që $9x+7y$ plotëpjestohet me 17.

4. Trekëndëshi me brinjë a, b dhe c e ka syprinën numrikisht të barabartë me 1.

Vërtetoni që kur $a \geq b \geq c$ atëhere $b \geq \sqrt{2}$

ZGJIDHJE

Shënojmë h_b lartësinë mbi b . Kemi $b \cdot h_b = 2S = 2$. Kemi $c \geq h_b$ nga rrjedh $b \geq h_b$. Që këtu del që $b^2 \geq 2$.

5. Vërtetoni mosbarazimin $x^8 + x^6 - x^3 - x + 1 > 0$ për çdo $x \in R$

ZGJIDHJE

Për $x < 0$ mosbarazimi është i vërtetë sepse x^3 dhe x janë < 0 .

Për $x > 1$ ana e majtë shkruhet $(x^5 - 1)(x^3 + x) + 1$, e cila është > 0

Për $0 < x < 1$ duhet të provojmë që $x^3 - x^6 + x - 1 < x^8$. Ana e majtë shkruhet $(x - 1) + (x^3 - x^6) =$

$x - 1 - \frac{1}{4} - (x^6 - x^3 + \frac{1}{4}) = (x - 1) - \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$, e cila është < 0 . Por $x^8 > 0$. Pra mosbarazimi është i vërtetë.