



REPUBLIKA E SHQIPËRISË  
MINISTRIA E ARSIMIT DHE E SHKENCËS  
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

---

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Viti mësimor 2012-2013

Faza e tretë

Klasa 12

1. Vërtetoni që për çdo  $x \geq 1$  ka vend mosbarazimi  $x^n \geq nx - n + 1$ , ku  $n \in \mathbb{N}$ .

**ZGJIDHJE**

Shënoj  $f(x) = x^n - 1 - nx + n$ .  $f'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1) \geq 0$  d.m.th. që  $f(x)$  është rritës. Me që  $f(1) = 0$  atëherë  $f(x) \geq 0$ .

2. Gjeni  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} \right)$

**ZGJIDHJE**

$$\left( \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} \right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} \right) = 1$$

3. Vërteoni se funksioni  $y = \cos \sqrt{x}$  nuk është periodik.

**ZGJIDHJE**

Supozojmë se funksioni është periodik me periodë  $T$ . d.m.th  $\cos \sqrt{x+T} = \cos \sqrt{x}$  për çdo  $x$  nga  $\mathbb{R}^+$ . Për  $x=0$   $\cos \sqrt{T} = 1$   $\sqrt{T} = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Për  $x=T$  kemi  $\cos \sqrt{2T} = \cos \sqrt{T} = 1$ .

$$\sqrt{2T} = 2l\pi \text{ ku } l \in \mathbb{Z}. \frac{\sqrt{2T}}{\sqrt{T}} = \sqrt{2} = \frac{k}{l} \in \mathbb{Z} \text{ (absurditet)}$$

4. Në trekëndëshin ABC me gjatësi të brinjëve  $a$ ,  $b$  dhe  $c$  vërtetoni se ka vend

mosbarazimi  $h_a \leq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}$  ku  $h_a$  është lartësia mbi brinjën me gjatësi  $a$

**ZGJIDHJE**

Dimë se  $S = \frac{1}{2} bc \sin A$  dhe  $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$ .

$$h_a = \frac{bc \sin A}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}} \leq \frac{bc \sin A}{\sqrt{2bc - 2bc \cos A}} = \frac{bc \sin A}{\sqrt{2bc} \sin \frac{A}{2}} = \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}$$

5. Gjeni sa shifra përmban numri natyror me të gjitha shifrat 1, nëse ai plotpjestohet me numrin 41.

**ZGJIDHJE**

Numuri  $1111 \dots 1 = 10^n + 10^{n-1} + \dots + 10 + 10^0 = \frac{10^{n+1} - 1}{9} = \frac{99 \dots 9}{9}$ .  $k \cdot 41 = \frac{9 \dots 9}{9}$ . Që

këtu  $k = 2710027100 \dots 271$

Kur  $k = 271$  numuri ka 5 shifra. Kur  $k = 27100271$  numuri ka 10 shifra. Pra numuri dotë ketë 5n shifra.