REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS
NË SHKOLLËN E MESME

Faza e tretë

Viti mësimor 2015-2016 **13 shkurt 2016**

Udhëzime për nxënësin:

- Olimpiada fillon në orën 10.00 dhe mbaron në orën 13.00.
- Teza përmban 6 pyetje.
- Për secilën pyetje është dhënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.
- Faqja e fundit mund të përdoret për llogaritje dhe veprime të tjera.
- **Llogaritjet dhe veprimet e kryera në faqen e fundit nuk do të vlerësohen nga komisioni i vlerësimit.**

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Pyetja	1	2	3	4	5	6
	10 pikë	10 pikë	5 pikë	10 pikë	5 pikë	10 pikë
Pikët e fituara						

Totali i pikëve të fituara ☐

KOMISIONI I VLERËSIMIT

1\. .... 2. ....

1. Le të jetë dhënë vargu (x_n) i numrave natyrorë të përcaktuar nga formula $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_{n+1} = x_n^2 - 2 \end{cases}$ për $n \geq 1$. Tregoni që çdo dy kufiza të ndryshme të vargut janë të thjeshta midis tyre. **10 pikë**

Zgjidhje

Të tregojmë që për çdo dy kufiza x_n, x_m, $x_n \neq x_m$, $(x_n, x_m) = 1$

Themi që kufizat e vargut $(x_n)_{n\in N}$ janë numra natyrorë tek.

$x_1 = 3$, tek

Për x_n tek $\Rightarrow x_n^2$ tek $\Rightarrow x_{n+1} = x_n^2 - 2$, tek

- Nqs dy kufizat janë të twajtës x_n, x_{n+1}, çdo pjesëtues i përbashkët i tyre d, pjesëton x_n dhe $x_n^2 - 2$

$d \mid x_n \Rightarrow d \mid x_n^2 \wedge d \mid x_n^2 - 2 \Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow d = 1$ ose $d = 2$, por $d \mid x_n$, x_n tek $\Rightarrow d = 1 \Rightarrow$ pmp$(x_n, x_{n+1}) = 1$, pra kufizat x_n dhe x_{n+1} janë të thjeshta midis tyre.

- Nqs dy kufiza janë të twajtës x_n, x_m, $m > n$, $m = n+k$, $k \in N$

x_n, x_{n+k}, $k \geq 2$, kemi që mbetja e pjesëtimit të x_{n+k} me x_n është gjithmonë 2 sepse:

Për $k = 2$, $x_{n+2} = x_{n+1}^2 - 2 = (x_n^2 - 2) - 2 = x_n^4 - 4x_n^2 + 4 - 2 = (x_n^3 - 4x_n) x_n + 2$

dhe

$x_{n+k} = Ax_n + 2 \qquad A \in Z$

$x_{n+k+1} = x_{n+k}^2 - 2 = Bx_n + 2$

ku $B = Ax_n^2 + 2A$

Pra $x_{n+k} = Ax_n + 2$

$d \mid x_n \wedge d \mid x_{n+k} \Rightarrow d = 1$ ose $d = 2$ por x_n tek $\Rightarrow d = 1$

pmp $(x_n, x_{n+k}) = 1$.

2. Përcaktoni çiftet e funksioneve $f, g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ të tillë që: **10 pikë**

1) $f(g(x)+y) = g(f(y)+x)\ \forall x, y \in \mathbb{Z}$

2) g − injektiv

Zgjidhje

Kemi $\forall x, y \in Z$ kemi nga (1):

$f(g(x)+y) = g(f(y)+x)$

për $x=0$, $\forall y \in Z$ kemi:

$f(g(0)+y) = g(f(y))$ $(*)$

Shënojmë $z = g(0)+y$, $z \in Z$

$\Leftrightarrow y = z - g(0)$ (3)

$f(z) = g(f(z-g(0)))$ ose $g(f(z-g(0))) = f(z)$

• Vlerësojmë $g(f(g(x)+y-g(0))) =$

$\overset{\text{nga (3)}}{=} f(g(x)+y) \overset{\text{nga (1)}}{=} g(f(y)+x)$

Pra $g(f(g(x)+y-g(0))) = g(f(y)+x)$

nga injektiviteti i g-së marrim:

$f(g(x)+y-g(0)) = f(y)+x$

• Kemi për çdo $x \in Z$ dhe $y = g(0) \in Z$

marrim $f(g(x)) = f(g(0))+x$

$f(g(x)) = g(f(0)+x)$ nga $(*)$

Kemi $g(f(0)+x) = f(g(0))+x$

Pra $g(f(0)+x) = f(g(0))+x$

pra g është e formës $k+x$

$g(x) = x+k$ pra

Njëlloj $f(x) = x+k$ ku $k \in Z$

f dhe g plotësojnë kushtet e ushtrimit të mësipërm.

3. Sa është numri i sistemeve të radhitura me n-elemente $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_n$ në mënyrë të tillë që elementët a_1 dhe a_n të jenë fqinjë. **5 pikë**

Zgjidhje

Vendosim a_1, a_n si një element të vetëm dhe më pas kemi gjithsej $n-1$ elemente, numri i të cilave është $(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = (n-1)!$

Por midis tyre a_1, a_2 kemi $2 \cdot 1 = 2!$ vendosje.
Nga parimi i shumëzimit kemi $(n-1)! \cdot 2! = 2 \cdot (n-1)!$ sisteme të radhitur me n elemente:
$a_1, a_2, \dots a_{n-1}, a_n$ në mënyrë të tillë që a_1, a_2 të jenë fqinjë.

4. Në rrethin me rreze R janë dhënë gjatësitë e kordave a dhe b që tendosin harqet AB dhe BC. Të gjendet gjatësia e kordës AC. **10 pikë**

Zgjidhje

Heqim diametrin BD. Shënojmë $A\hat{D}B = \alpha$, $B\hat{D}C = \beta$.

Në $\triangle ABD$, $\hat{A} = 90°$, mbështetet në diametër.

$AD^2 = BD^2 - AB^2$, $BD = 2R$

$AD = \sqrt{4R^2 - a^2}$

T. sin në $\triangle ACB$, $A\hat{C}B = \alpha$ mbështeten në të njëjtin diametër.

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{2R}$

Në $\triangle ADB$; $\hat{A} = 90°$ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R} = \frac{AD}{BD}$

Në $\triangle BCD$, $DC^2 = BD^2 - BC^2$

$DC = \sqrt{4R^2 - b^2}$ Nga $\frac{b}{\sin\beta} = 2R \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{2R}$

$\cos\beta = \frac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2R}$.

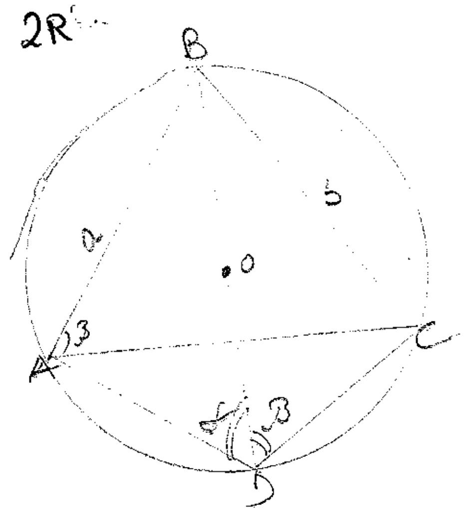
• Nga T. sin në $\triangle ADC$, $A\hat{D}C = \alpha + \beta$

$\frac{AC}{\sin(\alpha+\beta)} = 2R \Rightarrow AC = 2R\sin(\alpha+\beta)$

$AC = 2R(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)$

$AC = 2R\left(\frac{a}{2R}\cdot\frac{\sqrt{4R^2 - b^2}}{2R} + \frac{b}{2R}\cdot\frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}\right)$

$AC = \frac{a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$



5. Të vërtetohet mosbarazimi: **5 pikë**

$$\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\frac{\sqrt{20}}{9}+\frac{\sqrt{30}}{11}+\frac{\sqrt{42}}{13}+\frac{\sqrt{56}}{15}<\frac{7}{2}$$

Zgjidhje

$\forall\, a,b \in N$

$a \neq b$, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab} > 0$

$$a+b > 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{ab}}{a+b} < \frac{1}{2}$$

Marrim $b = a+1$

$$\frac{\sqrt{a(a+1)}}{2a+1} < \frac{1}{2}$$

Për $a=1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{1}{2}$

$a=2 \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{5} < \frac{1}{2}$

$a=3 \Rightarrow \frac{\sqrt{12}}{7} < \frac{1}{2}$

$a=4 \Rightarrow \frac{\sqrt{20}}{9} < \frac{1}{2}$

$a=5 \Rightarrow \frac{\sqrt{30}}{11} < \frac{1}{2}$

$a=6 \Rightarrow \frac{\sqrt{42}}{13} < \frac{1}{2}$

$a=7 \Rightarrow \frac{\sqrt{56}}{15} < \frac{1}{2}$

Mbledhim anë për anë:

$$\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+\frac{\sqrt{20}}{9}+\frac{\sqrt{30}}{11}+\frac{\sqrt{42}}{13}+\frac{\sqrt{56}}{15}<\frac{7}{2}.$$

6. Një prizëm i drejtë, që ka lartësi h dhe bazë gjashtëkëndësh të rregullt me brinjë h, pritet me një plan që kalon nëpër dy brinjë paralele të dy bazave, jo të së njëjtës faqe. Plani pret faqet e prizmit që nuk përmbajnë këto brinjë. Gjeni sipërfaqen e prerjes. **10 pikë**

Zgjidhje

Kemi që $AB = BC = CD = DE = EF = h$

$AG = BH = CI = DL = EM = FN = h$

Plani prerës kalon nëpër AF dhe IL, pret katër nga gjashtë faqet Sipas figurës. Segmentet e prerjes janë AO, OI, LP, PF.

Pra prerja është gjashtëkëndëshi AOILPFA. BOPE drejtkëndësh. Brinjët e këtij gjashtëkëndëshi janë të barabarta midis tyre, pasi $\Delta ABO \equiv \Delta HOI \equiv \Delta LHP \equiv \Delta PFE$, janë kënde me katete përkatësisht h dhe $h/2$.

Kemi EBOP drejtkëndësh

$EB = 2h \Rightarrow OP = 2h$

$S = 2 \cdot S_{AOPF} \rightarrow$ trapez.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ$

$AC^2 = h^2 + h^2 - 2h \cdot h \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$AC^2 = 3h^2$

$AC = h\sqrt{3}$

Në ΔACI, $\hat{C} = 90^\circ$

$l^2 = (h\sqrt{3})^2 + h^2$

$l = 2h$

$S = 2 \cdot \frac{1}{2}(AF + OP) \cdot \frac{IA}{2}$

$= h + 2h \cdot \frac{2h}{2} = 3h^2$