

## Zgjidhje 1.

Nga kushti  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p} \Rightarrow \begin{cases} m > p \\ n > p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - p = a \\ m - p = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = p + a \\ m = p + b \end{cases}$

$$\Rightarrow m \cdot n = (p+a)(p+b) = p^2 + (a+b) \cdot p + ab$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$$

$$\frac{m+n}{m \cdot n} = \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{2p+a+b}{p^2+(a+b)p+ab} = \frac{1}{p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 + (a+b) \cdot p + ab = p(2p+a+b)$$

$$p^2 + (a+b)p + ab = 2p^2 + ap + bp$$

$$| p^2 = ab$$

$$| p \cdot p = a \cdot b$$

$p$ , i thjeshtë:  $a = p \wedge b = p$  ose  $a = 1 \wedge b = p^2$  ose  $a = p^2 \wedge b = 1$

$$\begin{cases} m = p+a \\ m = p+b \end{cases} \quad m = p+1, \quad m = p+p^2 = p(1+p)$$

ose  $(p+1, p(1+p))$

$(p(1+p), p+1)$

$(2p, 2p)$

## Zgjidhje 2

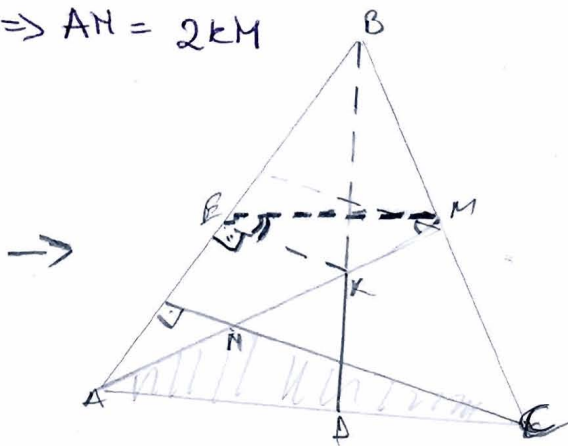
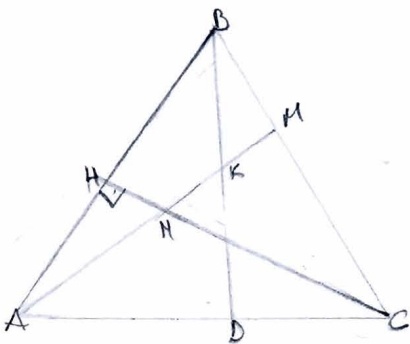
Ndërtojmë  $[KE] \parallel [CH]$ . Meqë  $KB = KA \Rightarrow AE = EB$  pasi

$\triangle AKB$  dybrinjëshëm  $\Rightarrow E$  meseri  $AB \Rightarrow \begin{cases} M \text{ meseri } BC \\ E \text{ meseri } AB \end{cases} \Rightarrow$

$EM$  vijë e mesme e trekëndëshit  $ABC$ .

Pra  $EM \parallel AC$  dhe  $EM = \frac{1}{2} AC$ . Në  $\triangle KEM$ , kemi këmbë të barabarta me  $\triangle ANC$

$$\Rightarrow \frac{AN}{KM} = \frac{AC}{EM} = 2 \Rightarrow AN = 2KM$$



### Zgjidhje 3

$$\begin{aligned}P(x, y) &= 2x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 4y + 5 \\&= (x^2 - 2x + 1) + (x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 4x - 4y) \\&= (x-1)^2 + (x+y-2)^2 \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

vlera më e vogël është 0,

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ (x+y-2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ x+y-2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ 1+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$A = \{(1; 1)\} \quad x=1 \wedge y=1 \Rightarrow$$

$P(x, y)$  merr vlerën më të vogël.

### Zgjidhje 4

Kemi për  $m=1$ :

$$a_{m+1} = a_1 + a_m + m$$

$$\Rightarrow a_{m+1} - a_m = a_1 + m = 1 + m$$

$$\boxed{a_{m+1} - a_m = 1 + m} \quad (*)$$

• për  $m=1, 2, \dots, k, \dots$  më (\*) marrim

$$a_2 - a_1 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 3$$

.....

$$a_k - a_{k-1} = k$$

Mbledhim anë për anë

$$a_k - a_1 = 2 + 3 + \dots + k$$

$$a_k - 1 = 2 + 3 + \dots + k$$

$$a_k = 1 + 2 + 3 + \dots + k$$

$$a_k = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{ku } k \in \mathbb{N}, \text{ për } \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{a_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

## Zgjidhje 5

Shënojmë me  $t_1, t_2, t_3, t_4$  (në orë) kohën që i duhet secilit tub përkatës për të mbushur pistunin. Sipas kushteve marrim sistemin e ekuacioneve:

$$\begin{cases} \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{1}{m} \\ \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} = \frac{1}{n} \\ \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} = \frac{1}{p} \\ \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_4} = \frac{1}{q} \end{cases}$$

Duke mbledhur anë për anë barazimet kemi:

$$3 \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} \right) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$\left[ \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \right] (*)$$

• Duke zbritur nga barazimi \* barazimin e dytë marrim

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{n}, \text{ prej nga}$$

$$x_1 = \frac{3m \cdot n \cdot p \cdot q}{mpq + m \cdot n \cdot q + m \cdot n \cdot p - 2m \cdot p \cdot q} \text{ orë}$$

• Duke zbritur nga barazimi (\*) barazimin e tretë, kemi

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{p} \Rightarrow x_2 = \frac{3m \cdot n \cdot p \cdot q}{m \cdot p \cdot q + m \cdot p \cdot q + m \cdot n \cdot p - 2mnq} \text{ orë}$$

• Duke zbritur nga barazimi (\*) barazimin e parë, kemi

$$\frac{1}{x_4} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{m} \Rightarrow$$

$$x_4 = \frac{3m \cdot n \cdot p \cdot q}{m \cdot p \cdot q + n \cdot q \cdot m + m \cdot n \cdot p - 2m \cdot p \cdot q} \text{ orë}$$

shënim: Çdo zgjidhje e dhënë nga nxënësit, që është e saktë shkencërisht merret parasysh dhe vlerësohet nga komisioni.