Zgjidhje 1

Kemi $9+2^k=m^2$, $m\in N$

$2^k=m^2-9$

$2^k=(m-3)(m+3)$, prej nga $\begin{cases} m-3=2^{k_1} \\ m+3=2^{k_2} \end{cases}$, $k_1,k_2\in N\cup\{0\}$, $k_1+k_2=k$

Rasti $k_1=0 \Rightarrow n=4 \Rightarrow 4+3=2^{k_2} \Rightarrow 7=2^{k_2}$?! , nuk ndodh pra $k_1\neq 0$

kemi që $(m+3)-(m-3)=6=2\cdot 3=2^{k_2}-2^{k_1}$ $\boxed{k_1\neq 0}$

$=2^{k_1}\cdot(2^{k_2-k_1}-1)=2\cdot 3 \Rightarrow \begin{cases} 2^{k_1}=2 \\ 2^{k_2-k_1}-1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1=1 \\ k_2-k_1=2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} k_1=1 \\ k_2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-3=2^{k_1}=2 \\ m+3=2^{k_2}=2^3=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3=2 \\ m+3=8 \end{cases}$, pra

$2^k=(n-3)(n+3) \Rightarrow 2^k=2\cdot 8=16 \Rightarrow \boxed{k=4}$

Pra, për $k=4$, kemi që $9+2k$ është katror i plotë.

Zgjidhje 2

Dimë që për çdo dy numra $A\geq 0$, $B\geq 0$ e mesmja aritmetike është jo më e vogël se e mesmja gjeometrike e tyre pra

$$\frac{A+B}{2}\geq\sqrt{A\cdot B} \Leftrightarrow A+B\geq 2\cdot\sqrt{AB}=2\,AB^{1/2}$$

Për të vërtetuar mosbarazimin më sipër nisemi nga e majta. Kemi:

$$2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2\left(2^{\sqrt[12]{x}}\cdot 2^{\sqrt[4]{x}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\cdot\left(2^{x^{\frac{1}{12}}}\cdot 2^{x^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\cdot\left(2^{x^{\frac{1}{12}}+x^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\cdot 2^{\frac{x^{\frac{1}{12}}+x^{\frac{1}{4}}}{2}} \geq 2\cdot 2^{\frac{\cancel{2}\cdot\left(x^{1/12}\cdot x^{1/4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\cancel{2}}} = 2\cdot 2^{\left(x^{\frac{1+3}{12}}\right)^{\frac{1}{2}}} = 2\cdot 2^{\left(x^{4/12}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=2\cdot 2^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = 2\cdot 2^{x^{\frac{1}{6}}} = 2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$$

Pra $2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$

Zgjidhje 3

Meqë $y = tg\,x$ rritës në $]0; \frac{\pi}{4}[$ kemi që:

$tg\alpha_1 \le tg\alpha_2 \le \ldots \le tg\alpha_n$ dhe në $]0, \frac{\pi}{2}[$, kemi

$\cos\alpha_i > 0$ për çdo i, $1 \le i \le n$

dhe $tg\alpha_1 \cdot \cos\alpha_i \le \sin\alpha_i$ pasi $tg\alpha_1 \cdot \cos\alpha_i - \sin\alpha_i =$

$$= \frac{\sin\alpha_1 \cdot \cos\alpha_i - \cos\alpha_1 \cdot \sin\alpha_i}{\cos\alpha_1} = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_i)}{\cos\alpha_1} \le 0$$

pasi $\alpha_1 - \alpha_i \le 0$ | Njëlloj

$\cos\alpha_1 > 0$ | $\sin\alpha_i \le tg\alpha_n \cdot \cos\alpha_i$

Kemi $tg\alpha_1 \le tg\alpha_n$

$tg\alpha_1 \cdot \cos\alpha_1 \le \sin\alpha_1 \le tg\alpha_n \cdot \cos\alpha_1$

$tg\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 \le \sin\alpha_2 \le tg\alpha_n \cdot \cos\alpha_2$

$\ldots \quad \ldots$

$tg\alpha_1 \cdot \cos\alpha_n \le \sin\alpha_n \le tg\alpha_n \cdot \cos\alpha_n$

Duke i mbledhur anë për anë mosbarazimet, kemi:

$tg\alpha_1(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n) \le \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n \le$

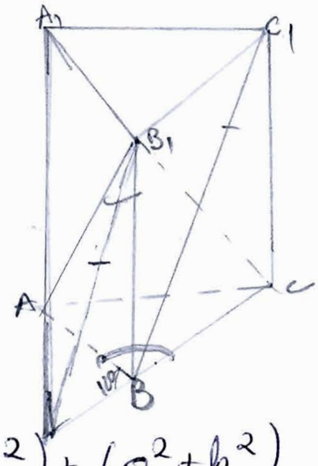
$\le tg\alpha_n(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n)$.

Meqë $\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n > 0$, kemi:

$$tg\alpha_1 \le \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n} \le tg\alpha_n$$

Zgjidhje 4

Shënojmë me D prerjen e zgjatimit të brinjës BC me paralelen e BC_1-së të hequr nga pika B.



$BD = BC = AB = AC = a$

$B_1D = BC_1 = AB = \sqrt{a^2+h^2}$

Në ΔABD, $\hat{ABD} = 120^\circ$. Nga teorema e kosinusit

$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos 120^\circ$

$= a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$

Pra $AD^2 = 3a^2$

Nga kushti $AB_1 \perp BC_1$ kemi që:

$AB_1 \perp DB_1 \iff AD^2 = AB_1^2 + B_1D^2 \iff 3a^2 = (a^2+h^2) + (a^2+h^2)$

$\iff 3a^2 = 2a^2 + 2h^2 \iff \frac{3}{2} = \frac{a^2+h^2}{a^2} \iff \frac{3}{2} = 1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2$

$\left(\frac{h}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\boxed{\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Zgjidhje 5

Dimë që një trekëndësh përcaktohet nga 3 pika. Duke kombinuar dy nga dy pikat e drejtëzës (d_1) marrim $C_{n_1}^2$ çifte pikash.

Në drejtëzën (d_2) paralel me drejtëzën (d_1) kemi n_2 pika.

Pra numri i trekëndëshave të llojit të treguar me dy kulme në (d_1) dhe një kulm në (d_2) është $n_2 \cdot C_{n_1}^2$.

Njëlloj arsyetojmë për numrin e trekëndëshave që kanë dy kulme në drejtëzën (d_2) dhe një kulm në drejtëzën (d_1) dhe kemi $n_1 \cdot C_{n_2}^2$ trekëndësha.

Si përfundim, numri i trekëndëshave, të mundshëm me kulme në pikat e dhëna është:

$n_2 \cdot C_{n_1}^2 + n_1 \cdot C_{n_2}^2$

Shënim: Çdo zgjidhje e dhënë nga nxënësit, që është e saktë shkencërisht merret parasysh dhe vlerësohet nga komisioni.