Zgjidhje 1.

Supozojmë se $3n+1=a^2$, ku n është numër i thjeshtë.

$$3n+1=a^2$$
$$3n=a^2-1$$
$$3\cdot n=(a-1)\cdot(a+1)$$

Kemi 3 i thjeshtë, n i thjeshtë, pra $3\cdot n$ është zbërthim kanonik i numrit natyror me dy faktorë të zbërthyer.

Dimë që zbërthimi kanonik është i vetëm, pra kemi:

$$\begin{cases} a-1=3 \\ a+1=n \end{cases} \quad \text{ose} \quad \begin{cases} a-1=n \\ a+1=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ n=5 \end{cases} \quad \text{ose} \quad \begin{cases} a=2 \\ n=1 \end{cases}$$, n jo i thjeshtë

Pra $\boxed{n=5}$

Zgjidhje 2

Supozojmë se një trekëndësh i tillë ekziston dhe brinjët e tij janë a, b, c.

Kemi që sipërfaqja e trekëndëshit jepet:

$$S=\frac{a\cdot 1}{2}=\frac{b\cdot 2}{2}=\frac{c\cdot 3}{2}$$ prej nga $a=2b=3c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=\frac{a}{2} \\ c=\frac{a}{3} \end{cases}$$

Krahasojmë b+c dhe a, $b+c=\frac{a}{2}+\frac{a}{3}=\frac{5a}{6}<a$.

Pra $b+c<a$?! Kjo është absurditet, pasi dimë që çdo brinjë e trekëndeshit është më e vogël se shuma e dy të tjerave.

Pra, një trekëndësh i tillë nuk ekziston.

Zgjidhje 3

Nga përgjysmoret e këndeve, marrim $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$
ose $2\hat{A}_1 + 2\hat{B}_1 + 2\hat{C}_1 = 180°$, nga ku:

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 90°$$

Në ΔAPC, kemi që $C\hat{P}K$ është i jashtëm, $C\hat{P}K = \hat{A}_1 + \hat{C}_2 = \hat{A}_1 + \hat{C}_1$.
Në ΔKPE kemi:

$$P\hat{K}E + C\hat{P}K + P\hat{E}K = 180°$$

$$P\hat{K}E + (\hat{A}_1 + \hat{C}_1) + P\hat{E}K = 180°$$

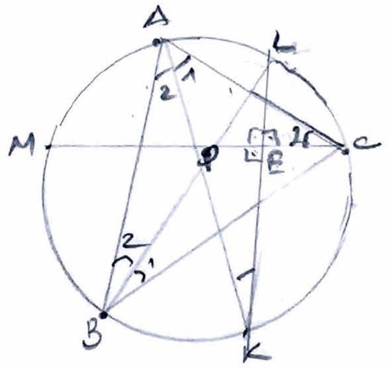
$P\hat{K}E = \hat{B}_2$, pasi mbështeten më të njëjtin hark.

$$P\hat{K}E = \hat{B}_2 = \hat{B}_1$$

Kemi $\hat{B}_1 + (\hat{A}_1 + \hat{C}_1) + P\hat{E}K = 180° \Rightarrow$

$90° + P\hat{E}K = 180° \Rightarrow P\hat{E}K = 90°$

Pra $[PC] \perp [LE] \Rightarrow [MC] \perp [KL]$
apo $[KL] \perp [MC]$



Zgjidhje 4

$a = 1$, $b = -2m$, $c = m^2 - 1$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 4m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 - 1)$$

$$D = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2m \pm 2}{2 \cdot 1} = m \pm 1$$

Nga kushti kemi

$$\begin{cases} -2 < x_1 < 4 \\ -2 < x_2 < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < m+1 < 4 \\ -2 < m-1 < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < m < 3 \\ -1 < m < 5 \end{cases} \Rightarrow -1 < m < 3$$

Për $m \in]-1; 3[$, rrënjët e ekuacionit $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ ndodhen në $]-2; 4[$

Zgjidhje 5.

Marrim dy ekuacionet e para dhe në fillim eleminojmë x duke shumëzuar të parin me $c \neq 0$ dhe të dytin me $a \neq 0$.

Zbresim anë për anë

$$-\begin{cases} acx + c^2 y + bcz = 0 \\ ac^2 x + bay + aaz = 0 \end{cases}$$

$$(c^2 - ba)y + (bc - a^2)\cdot z = 0$$

prej nga $\frac{y}{a^2 - bc} = \frac{z}{c^2 - ab}$ ose $\frac{y}{bc - a^2} = \frac{z}{ab - c^2}$ (1)

Njëlloj eleminojmë y-in ku $\frac{x}{ac - b^2} = \frac{z}{ab - c^2}$ (2)

Nga (1) dhe (2) marrim:

$\frac{x}{ac - b^2} = \frac{y}{bc - a^2} = \frac{z}{ab - c^2} = t$, ku t është parameter

$x = t(ac - b^2)$

$y = t(bc - a^2)$

$z = t(ab - c^2)$

Zëvendësojmë në ekuacionin e tretë të sistemit:

$bx + ay + cz = 0$, kemi:

$bt(ac - b^2) + at(bc - a^2) + ct(ab - c^2) = 0$, $\forall t \Rightarrow$

$b(ac - b^2) + a(bc - a^2) + c(ab - c^2) = 0$

$3abc - b^3 - a^3 - c^3 = 0$ ose $\boxed{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0}$ çdv

Shënim: Çdo zgjidhje e dhënë nga nxënësit, që është e saktë shkencërisht merret parasysh dhe vlerësohet nga Komisioni.