REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT DHE SPORTIT

Testimi përzgjedhës për Olimpiadat Ndërkombëtare të Matematikës për Juniorë. Tiranë, më 14 mars 2015

1. Për çdo numër natyror n shënohet me a_n shifra e fundit e shumës së numrave nga 1 deri në n. Për shembull, $a_5 = 5$, $a_6 = 1$.

   (a) Të gjendet a_{21}.

   (b) Të gjendet shuma $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2015}$.

   Zgjidhje.

   (a) $a_{21} = 1$.

   (b) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, prandaj a_{n+20} do japë shifrën e njësheve të $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) + \cdots + (n+20) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1+n+20)20}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + (2n + 21)10$. Meqë $10(2n+21)$ mbaron me zero, atëherë shifra e fundit e kësaj shume përcaktohet nga ajo e $\frac{n(n+1)}{2}$, që nga $a_{n+20} = a_n$.
   Me njehsim të drejtpërdrejtë vërejmë se

   $$a_1+a_2+\cdots+a_{20} = 1+3+6+0+5+1+8+6+5+5+6+8+1+5+0+6+3+1+0+0 = 70.$$

   Nga numri 1 deri te numri 2015 kemi 100 grupe njëzetëshe, prandaj

   $$a_1 + \cdots + a_{2000} = 100 \cdot 70 = 7000.$$

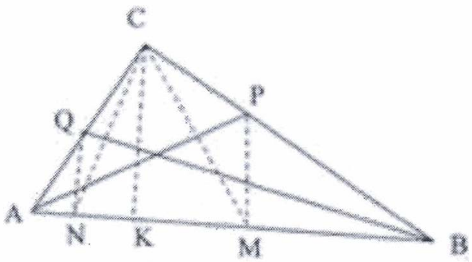
   Për të tjerët njehsojmë:

   $$a_{2001} + a_{2002} + \cdots + a_{2015} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} =$$
   $$1 + 3 + 6 + 0 + 5 + 1 + 8 + 6 + 5 + 5 + 6 + 8 + 1 + 5 + 0 = 60.$$

   Përfundimisht:

   $$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2015} = 7000 + 60 = 7060.$$

2. Jepet trekëndëshi ABC kënddrejtë në kulmin C. Përgjysmorja e këndit CAB pret katetin BC në pikën P, ndërsa ajo e këndit CBA pret katetin AC në pikën Q. Janë shënuar me M e N përkatësisht këmbët e pinguleve të hequra nga pikat P e Q mbi AB. Të njehsohet masa e këndit MCN.



Zgjidhje. Nga C heqim pingulen mbi AB. Pikat P e Q janë pika të përgjysmoreve, prandaj $CP = PM$ dhe $QN = QC$. Pra trekëndëshat MPC dhe CQN janë dybrinjënjëshëm, që nga $\angle PCM = \angle PMC$ dhe $\angle QCN = \angle QNC$. Meqë $\angle KCM = \angle PMC$ dhe $\angle KCN = \angle QNC$, atëherë $\angle PCM = \angle KCM$ dhe $\angle QCN = \angle KCN$. Rrjedhimisht $2\angle KCM + 2\angle KCN = 90^0$, që nga $\angle KCM + \angle KCN = \angle MCN = 45^0$

3. Numri

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2014\cdot 2015}$$

paraqitet në trajtën e thyesës së pathjeshtueshme $\frac{m}{n}$.

(a) Të gjendet $m+n$.

(b) Të gjendet mbetja e pjesëtimit e $(m+3)^{1444}$ me n.

Zgjidhje.

(a) Meqë

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2014\cdot 2015}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}\right),$$

atëherë $m = 2014$ dhe $n = 2015$, prandaj $m + n = 4029$.

(b) $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, prandaj $\phi(2015) = 1440$, që nga $(m+3)^{1444} \equiv 2017^{1444} = 2^4 \equiv 16 \mod 2015$.

4. Për çdo numër natyror n ndërtohen numrat $a_1 = n^2 - 10n + 23$, $a_2 = n^2 - 9n + 31$, $a_3 = n^2 - 12n + 46$.

(a) Të tregohet që shuma $a_1 + a_2 + a_3$ është numër çift.

(b) Të gjenden të gjithë numrat natyrorë n të tillë që të tre numrat a_1, a_2, a_3 të jenë të thjeshtë.

Zgjidhje.

(a) E transfojmojmë shumën $a_1 + a_2 + a_3$ në trajtën:

$$n^2-10n+23+n^2-9n+31+n^2-12n+46 = 3n^2-31n+100 = 2n^2-30n+n(n-1)+100,$$

në të cilën duket që ajo është numër çift.

(b) Meqë $a_1 + a_2 + a_3$ është çift, të paktën njëri prej a_1, a_2, a_3 është çift, pra 2. Duke zgjidhur ekuacionet

$$n^2 - 10n + 23 = 2, n^2 - 9n + 31 = 2, n^2 - 12n + 46 = 2$$

marrim $n = 3$, ose $n = 7$.
Verifikohet lehtë që këto vlera i kënaqin kushtet:

$n = 3 \;\; a_1 = 2, a_2 = 13, a_3 = 19$

$n = 7 \;\; a_1 = 2, a_2 = 17, a_3 = 11$

5. Numrat realë pozitivë x e y janë të tillë që $x + y = 1$. Të tregohet që

$$\frac{(3x-1)^2}{x} + \frac{(3y-1)^2}{y} \geq 1.$$

Për ç'vlera të x e y arrihet barazimi?
Zgjidhje.

$$\frac{(3x-1)^2}{x} + \frac{(3y-1)^2}{y} = \frac{9x^2-6x+1}{x} + \frac{9y^2-6y+1}{y} =$$

$$= 9x - 6 + \frac{1}{x} + 9y - 6 + \frac{1}{y} = -3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Dimë që, për çdo dy numra x e y: $(x+y)^2 \geq 4xy$. Që nga, për numrat tonë:

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4.$$

Duke përdorur këtë mosbarazim në barazimin e mësipwrm, fitojmë vlerësimin e kërkuar. Barazimi arrihet kur ndodh barazimi në mosbarazimin $(x+y)^2 \geq 4xy$, pra per $x = y = \frac{1}{2}$.