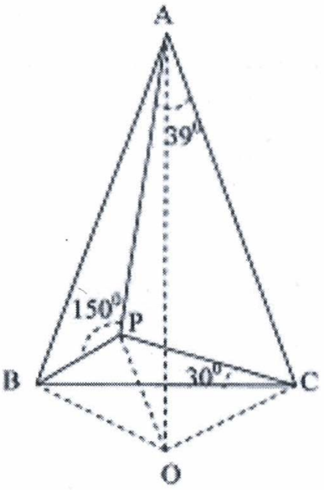
REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT DHE SPORTIT

Testimi përzgjedhës për Olimpiadat Ndërkombëtare të Matematikës për shkollat e mesme. Tiranë, më 14 mars 2015

1. Jepet trekëndëshi dybrinjënjëshëm ABC $(AB = AC)$. Pika e brendshme P e trekëndëshit është e tillë që $\angle APB = 150^0$, $\angle PCB = 30^0$ dhe $\angle PAC = 39^0$. Gjeni masën e këndit PAB.
   Zgjidhje. Shënojmë me O qendrën e rrethit të jashtëshkruar trekëndëshit PBC.



Meqë $\angle PCB = 30^0$, atëherë $\angle POB = 60^0$ dhe meqë $OP = OB$ si rreze, trekëndëshi BOP është barabrinjës, prandaj $BP = OP$, $\angle APO = 360^0 - 150^0 - 60^0 = 150^0 = \angle APB$. Atëherë $\triangle APB = \triangle APO$ pasi AP është e përbashkët, $\angle APO = \angle APB$ dhe $PB = OP$. Prej këndej $AP = AO = AC$. Atëherë $\triangle AOB = \triangle AOC$ si trekëndësha me tri brinjë të barabarta, prandaj $\angle BAO = \angle CAO$. Ndërkohë $\angle BAO = 2\angle BAP = 2\angle PAO = \angle CAO$ dhe rezultati merret nga vargu i implikimeve:

$\frac{“CAO}{“PAO} = 2 \Rightarrow \frac{“CAO+“PAO}{“PAO} = \frac{1+2}{1} \Rightarrow \frac{“PAC}{“PAO} = 3 \Rightarrow \frac{39^0}{“PAO} = 2 \Rightarrow \angle PAO = 13^0 = \angle PAB$.

2. Funksioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ është i tillë që

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

   (a) Të gjendet $f(0)$.

   (b) Të gjenden të gjithë funksionet f që plotësojnë kushtin e mësipërm.

   Zgjidhje.

(a) Duke marrë në kushtin e përcaktimit të f vlerën $y = 0$ përftojmë $f(x)f(0) = f(x)$, që nga $f(x)\left(f(0) - 1\right) = 0$, prandaj, ose $f(x) = 0 \forall x$, ose $f(0) = 1$. E para është e pamundur (duke marrë $x = y = 1$), prandaj ka vend vetëm vlera $f(0) = 1$.

(b) Duke zëvendësuar $y = -x$ marrim

$$f(x)f(-x) = f(0) - x^2 = 1 - x^2$$

e në veçanti

$$f(1)f(-1) = 1 - 1^2 = 0.$$

Pra kemi $f(1) = 0$, ose $f(-1) = 0$. Në qoftë se $f(1) = 0$, atëherë duke marrë $y = 1$ përftojmë

$$0 = f(x)f(1) = f(x+1) + x,$$

që nga $f(x+1) = -x$, prandaj dhe $f(x) = 1 - x$. Verifikohet lehtë që kjo është një zgjidhje.

Ndërsa, nëse $f(-1) = 0$, zëvendësojmë $y = -1$ dhe përftojmë

$$0 = f(x)f(-1) = f(x-1) - x,$$

pra $f(x-1) = x$, që nga $f(x) = 1 + x$. Edhe kjo vlerë verifikohet që është zgjidhje.

Pra dy zgjidhjet janë $f(x) = 1 + x$ dhe $f(x) = 1 - x$.

3. Lẹ të jetë $a \geq 2$; me rrënjët x_1 e x_2 të ekuacionit $x^2 - ax + 1 = 0$ ndërtojmë vargun me terma $S_n = x_1^n + x_2^n$.

(a) Të tregohet se vargu $\left\{\frac{S_n}{S_{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ është monoton zbritës.

(b) Të gjenden vlerat e a për të cilat mosbarazimi

$$\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_3} + \cdots + \frac{S_n}{S_{n+1}} > n - 1$$

plotësohet për çdo $n \in \mathbb{N}$.

Zgjidhje. Meqë $a \geq 2$, rrënjët x_1 e x_2 janë dy, janë pozitive dhe $x_1 x_2 = 1$. Në veçanti $S_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(a)

$$\begin{aligned} \tfrac{S_{n-1}}{S_n} \geq \tfrac{S_n}{S_{n+1}} &\Leftrightarrow \left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right)\left(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}\right) \geq \left(x_1^n + x_2^n\right)^2 \\ &\Leftrightarrow x_1^{n-1}x_2^{n+1} + x_2^{n-1}x_1^{n+1} \geq 2x_1^n x_2^n \\ &\Leftrightarrow \left(x_1 x_2\right)^{n-1}\left(x_1 - x_2\right)^2 \geq 2. \end{aligned}$$

(b) *Përgjigje.* $a = 2$.

Zgjidhje. Supozojmë se për vlerën $a \geq 2$ të parametrit ka vend kushti i dhënë. Atëherë, nga pika a) rrjedh se

$$n\frac{S_1}{S_2} \geq \frac{S_1}{S_2} + \cdots + \frac{S_n}{S_{n+1}} > n - 1.$$

Pra $\frac{S_1}{S_2} > 1 - \frac{1}{n}, \quad \forall n$. Duke kaluar në limit për $n \to \infty$ marrim $\frac{S_1}{S_2} \geq 1$. Nga formulat e Vietës kemi $S_1 = a, \ S_2 = a^2 - 2$. Atëherë

$$\frac{a}{a^2 - 2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(a-2)(a+1)}{a^2 - 2} \leq 0,$$

dhe, meqë $a \geq 2$, rrjedh se $a = 2$.
Anasjelltas, në qoftë se $a = 2$, atëherë $x_1 = x_2 = 1$, prandaj dhe $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2$. Rrjedhimisht

$$\frac{S_1}{S_2} + \cdots + \frac{S_n}{S_{n+1}} = n > n - 1,$$

pra kushti i dhënë përmbushet.

4. Të gjenden të gjithë numrat e plotë x, y, z të tillë që

$$xy \equiv 1 \mod z, \quad xz \equiv 1 \mod y, \quad yz \equiv 1 \mod x.$$

Zgjidhje. Modulet x, y, z i konsiderojmë natyrorë, dhe të ndryshëm nga njëshi, meqë për vlerën një të variablave merren kushte triviale. Vërejmë që numrat x, y, z janë dy e nga dy reciprokisht të thjeshtë $(x, y) = (x, z) = (y, z) = 1$. I rendisim: $2 \leq x < y < z$ dhe duke i kombinuar të tri kongruencat kemi

$$xy + xz + yz \equiv 1 \mod xyz.$$

Që nga $xy + xz + yz - 1 = k(xyz)$, për ndonjë $k \in \mathbb{N}$. Pjesëtojmë me xyz dhe kemi

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{xyz} + k > 1.$$

Meqë $x < y < z$, merret që $1 < \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} < \frac{3}{x}$, çka jep si vlerë të vetme $x = 2$. Në këtë rast mosbarazimet japin $\frac{1}{2} < \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{2}{y}$, çka jep $y = 3$. Që këtej merren vlerat e vetme për z: 4 e 5. Pra, për $2 \leq x < y < z$, zgjidhjet janë $(2, 3, 4)$ e $(2, 3, 5)$. E para nuk pranohet se $(2, 4) > 1$.

5. Kemi një varg me të gjitha termat të barabarta me 1. Në këtë varg, ndërmjet njëshit të parë e atij të dytë vendosim një dysh; ndërmjet njëshit të dytë dhe atij të tretë vendosim dy dysha; ndërmjet njëshit të tretë dhe atij të katërt vendosim tre dysha e kështu me rradhë. Formohet kësisoj vargu:

$$1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, \ldots$$

Duke shënuar me a_n termin e përgjithshëm të këtij vargu të ri, të gjendet vlera e shprehjes:

$$a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + \cdots + a_{2014} \cdot a_{2015}.$$

Zgjidhje. Vërejmë se indekset e termave të barabarta me 1 janë elemente të vargut $1, 3, 6, 10, \ldots$, termi i përgjithshëm i të cilit është $\frac{1}{2}(n + 1)n$. Meqë indeksi i termit të fundit është 2015, atëherë indeksi i termit të fundit që është 1 duhet të plotësojë kushtin $\frac{1}{2}(n + 1)n \leq 2015$, nga ku gjejmë $k = 62$. Pra 62 terma të vargut janë njësha. Shuma që duam të gjejmë ka 2014 prodhime, që janë të barabarta me 2 ose me 4. Kjo shumë mund të njehsohet si $4 \cdot 2014 - S_d$ ku S_d është shuma e prodhimeve të barabarta me 2. Vetëm njëshi i parë formon një prodhim të barabartë me 2, të gjithë njëshat e tjerë $(62 - 1 = 61)$ formojnë dy prodhime të barabarta me 2, njërin me dyshin në të majtë e njërin me dyshin në të djathtë. Prandaj $S_d = 2 + 2 \cdot (61 \cdot 2) = 246$, që nga shuma e kërkuar është $4 \cdot 2014 - S_d = 4 \cdot 2014 - 246 = 7810$