



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Viti mësimor 2013-2014

Faza e tretë

Klasa 9

Olimpiada fillon në orën 9.00 dhe mbaron në orën 12.00.

1. Në rrethin me rreze r dhe diametër AB merret një pikë çfarëdo C. Të vërtetohet se ka vend mosbarazimi $S \leq r^2$

ZGJIDHJE

$2S = AC \cdot CB$ (Trekëndëshi ABC kënddrejtë).

$$\text{Dimë se } AC \cdot CB = AC \cdot \sqrt{4r^2 - AC^2} \leq \frac{AC^2 + 4r^2 - AC^2}{2} = 2r^2$$

2. Gjeni të gjitha vlerat e m dhe n nga \mathbb{N} , të tilla që plotësojnë barazimin $49 + 2^n = m^2$

ZGJIDHJE

.Barazimi shkruhet $2^n = (m-7)(m+7)$, i cili ka vend kur
$$\begin{cases} m-7 = 2^x \\ m+7 = 2^{n-x} \end{cases} \text{ ose } 7 = 2^{x-1}(2^{n-2x}-1),$$
 i

cilli ka vend vetëm kur $2^{n-2x} = 8$ dhe $2^{x-1} = 1$. Pra $x=1$ dhe $n=5$. $m=9$.

3. Në trekëndëshin ABC brinjët $AB=b$; $AC=c$ dhe $BC=a$, plotësojnë kushtin

$5a^2 = b^2 + c^2$ atëherë mesoret e brinjëve AB dhe AC janë pingule..

ZGJIDHJE

Shënojmë me G pikëprerjen e mesoreve. Mesorja e hequr nga A pret BC në E. Shënojmë me x GE. Del se $AE=3x$. Nga teorema mbi diagonalet e paralelogramit me brinjë b dhe c

dhe diagonale a dhe $6x$, kemi $2(b^2+c^2)=a^2+36x^2$, ose $x=\frac{a}{2}$. Në trekëndëshin BGC meqë

mesorja $GE = \frac{1}{2} BC$ del se këndi BGC i drejtë.

4. Ekuacioni $x^2 + ax + b = 0$, ku a dhe $b \in \mathbb{Q}$ ka si një rrënjë $x = 1 - \sqrt{2}$. Gjeni rrënjën tjetër.

ZGJIDHJE

M.q.s. $x = 1 - \sqrt{2}$ është rrënjë kemi $(a+2)\sqrt{2} = a+b+3$. Nga që a dhe $b \in \mathbb{Q}$ barazimi ka vend kur $a=-2$ dhe nga del $b=-1$. Ekuacioni është $x^2 - 2x - 1 = 0$ dhe $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

5. Të zgjidhet sistemi
$$\begin{cases} x^3 = y^2 \\ x + y + \sqrt[5]{xy} = 819 \end{cases}$$

ZGJIDHJE

Duket se $x > 0$. Shënojmë $x=t^2$ ($t > 0$). Kemi $y=t^3$ dhe $t^2+t^3+t=819$ ose $(t-9)(t^2+10t+91)=0$.