REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

# OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

**Viti mësimor 2014-2015** **Faza e tretë** **Klasa 9**

\

**Olimpiada fillon në orën 9.00 dhe mbaron në orën 12.00.**

**1**. Një numër treshifror, dy shifrat e fundit i ka të njëjta, dhe shuma e shifrave të tij plotëpjestohet me 7. Vërtetoni se numri plotëpjestohet me 7.

**ZGJIDHJE**

Numri N= 100x+11a ( ku x është shifra e qindësheve dhe a shifra e njësheve dhe dhjetsheve)

M.q.s x+2a plotëpjestohet me 7 rrjedh x+2a= 7k; x=7k-2a.

N= 100(7k-2a)+11a=700k-189a=7(100k-27a)

**2**. Jepet katrori ABCD, dhe pika K në brinjën CD. Përgjysmorja e këndit BAK pret CB në pikën L.Të vërtetohet që BL+DK=AK.

**ZGJIDHJE**

Në zgjatim të CD merrni një pikë E të tillë që DE=BL. Del se trekëndëshi AEK është dybrinjishëm, pra BL=DK

**3.** Jepet trekëndëshi ABC me brinjë BC= *a;* AB= *c ;* AC= *b* dhe mesoren mbi brinjën BC= *m*. Të vërtetohet mosbarazimi $\frac{1}{2}(c+b)-\frac{a}{2}<m<\frac{1}{2}(c+b)$

**ZGJIDHJE**

Ndërtoni paralelogramin me brinjë c dhe b dhe pikë prerje të diagonaleve O. Del që 2m< b+c. Zbatoni vetinë e brinjëve të trekëndëshit në dy trekëndëshat që kanë si brinjë diagonalen 2m të paralelogramit.

**4**. Për cilat vlera të *m* sistemi $\begin{cases} y=x^2-x-1 \\ mx-y=5 \end{cases}$ ka vetëm një zgjdhje.

**ZGJIDHJE**

Njëri ekuacion i sistemit merr formën $-x^2+(m+1)x-4=0$. Që të ketë një zgjidhje duhet që D=0.

**5**. Të vërtetohet barazimi $(3^{m-1}+3^m)^2=16\cdot 9^{m-1}$

**ZGJIDHJE**

Duke zbatuar formulën $(a+b)^2$ dhe duke kryer veprimet del i vërtetë barazimi

REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

# OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

**Viti mësimor 2014-20154** **Faza e tretë** **Klasa 10**

**Olimpiada fillon në orën 10.00 dhe mbaron në orën 13.00.**

**1.** Në trekëndëshin ABC brinjët AB=$b$ ; AC= $c$ dhe BC=$a$. Vërtetoni që, nëse brinjët *a*, *b*, *c* plotësojnë kushtin $5a^2 = b^2 + c^2$, atëhere mesoret e brinjëve AB dhe AC janë pingule.

**ZGJIDHJE**

Shënojmë me G pikëprerjen e mesoreve.Mesorja e hequr nga A pret BC në E. Shënojmë me x GE. Del se AE=3x. Nga teorema mbi diagonalet e paralelogramit me brinjë b dhe c dhe diagonale a dhe 6x, kemi $2(b^2+c^2)=a^2+36x^2$,ose x=$\frac{a}{2}$. Në trekëndëshin BGC meqë mesorja GE = $\frac{1}{2}$ BC del se këndi BGC i drejtë.

**2.** Të zgjidhet ekuacioni $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{x-\sqrt{x^2-x}} = \frac{3}{x}$.

**ZGJIDHJE**

Mbas transformimesh del $4\sqrt{x^2+x}$-$\sqrt{x^2-x}$ =3+5x ose-8$\sqrt{x^4-x^2}$ =8$x^2$+15x+9. Duket se ana e majtë për çdo x merrvlera negative kurse ana e djathtë merr vlera positive ,pra ekuacioni nuk ka zgjidhje.

**3.** Jepet trekëndëshi ABC me brinjë $a$; $b$; $c$ dhe $r$ rrezja e rrethit të brendashkruar tij. Të vërtetohet se ka vend barazimi

$$\frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-a)(p-c)} = \frac{1}{r^2}$$

( $p$ është gjysmëperimetri i trekëndëshit).

**ZGJIDHJE**

Barazimi jonë është i njëvlefshëm me $\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{r^2}$ Dimë se S=pr dhe nga formula e heronit kemi p(p-a)(p-b)(p-c) = $S^2=p^2r^2$ ose p-a)(p-b)(p-c) =$pr^2$

Pra $\frac{p}{pr^2} = \frac{1}{r^2}$

**4.** Numrat $a$ dhe $b$ plotësojnë kushtin $a+b=1$ ($a$ dhe $b>0$). Të vërtetohet se $ab \leq \frac{1}{4}$ dhe $(1+\frac{1}{a})\cdot(1+\frac{1}{b}) \geq 9$.

**ZGJIDHJE**

$1=a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ,pra $ab \leq \frac{1}{4}$.Nga ana tjetër kemi $8ab \leq 2$ ose $9ab-ab \leq a+b+1$;

$9ab \leq ab+a+b+1$; $9ab \leq (a+1)(b+1)$ ; $9 \leq (1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})$

**5.** Në trekëndëshin ABC ka vend barazimi $|\overrightarrow{BC}|\cdot\overrightarrow{GA}+|\overrightarrow{AC}|\cdot\overrightarrow{GB}+|\overrightarrow{AB}|\cdot\overrightarrow{GC}=\vec{0}$,ku pika G është pika e prerjes së mesoreve të trekëndëshit. Vërtetoni se trekëndëshi ABC është barabrinjës.

**ZGJIDHJE**

Vërtetohet lehtë se $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ose $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{GC}$.Barazimi jonë merr formën

$(|\overrightarrow{BC}|-|\overrightarrow{AB}|)\cdot\overrightarrow{GA}+(|\overrightarrow{AC}|-|\overrightarrow{AB}|)\cdot\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.M.q.s. vektorët $\overrightarrow{GA}$ e $\overrightarrow{GB}$ janë me drejtime të ndryshme atëhere barazimi ka vend vetëm kur $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|$.

**Shënim:** Çdo pyetje vlerësohet me 10 pikë.

REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT

AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

## OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

**Viti mësimor 2014-2015** **Faza e tretë** **Klasa 11**

**Olimpiada fillon në orën 10.00 dhe mbaron në orën 13.00.**

**1.** Në trekëndëshin ABC me brinjë a ,b ,c provoni se në se ka vend barazimi $\sin^2 B = \frac{1}{2} tgA \cdot tgC$ ,atëhere është i vërtetë barazimi $b^4 = a^4 + c^4$ .

**ZGJIDHJE**

Nga teorema e sinusit kemi $\frac{b^2}{2R^2} = \frac{ac}{4R^2 \cos A \cos C}$ ose $\cos A \cos C = \frac{ac}{2b^2}$ .

Më pas zbatojmë teoremën e cosinusit dhe del barazimi ynë.

**2.** Jepet trekëndëshi ABC, ku AB=c AC=b dhe BC=a. Pika O është qendra e rrethit brendashkruar trekëndëshit. Nga pika O hiqet një drejtëz,e cila pret AB në E dhe AC në F. Vërtetoni se ka vend barazimi (AE+AF)$\cdot$bc=p$\cdot$AE$\cdot$AF ( p është perimetri i trekëndëshit ABC).

**ZGJIDHJE**

Shënojmë me $\alpha$ këndin me kulm në A dhe r rrezen e rrethit të brendashkruar.

Syprina e trek.AEF=$\frac{1}{2}$ AE.AF.sin$\alpha$ =Syprinën e trek AEO+Syp.trek.

AFO=$\frac{r}{2}$ (AE+AF) ose (AE+AF).r=AE.AF.sin$\alpha$ . Dimë se Syp.trek ABC=$\frac{1}{2}$ p.r

=$\frac{1}{2}$ bcsin$\alpha$ ,nga del $\frac{\sin\alpha}{r} = \frac{p}{bc}$.duke zvendësuar del barazimi ynë.

**3.** Jepet vargu $a_1, a_2, .........a_n ...$, ku $a_1$=2 dhe $a_n - a_{n-1} = 2(n-1)$.Të gjendet kufiza e përgjithshme e vargut dhe të vërtetohet se ajo është çift për çdo n.

**ZGJIDHJE**

Kemi $a_2$- $a_1$=2; $a_3$-$a_2$=4................ $a_n - a_{n-1} = 2(n-1)$. duke i mbledhur anë për anë del $a_n$= 2+n(n-1),ecila duket që është çift.

**4.** Të vërtetohet se syprina e përgjithshme $S_p$ e një piramide të rregullt trekëndore me brinjë anësore 1njësi plotëson kushtin $S_p < \frac{3}{2}\sqrt{3}$

**ZGJIDHJE**

Shënojmë me $\alpha$ këndin e faqes anësore dhe me x brinjën e bazës.Kemi $S_b = x^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ ;

$S_a = \frac{3}{2}\sin\alpha$ Nga T.cosinusit kemi $x^2=2(1-\cos\alpha)$. Përfundimisht kemi $S_p=$

$\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\sin(\alpha-30) < \frac{3}{2}\sqrt{3}$ ($3\alpha<360$; $\alpha<120$; $\alpha-30<90$)

**5.** Të zgjidhet ekuacioni $2\cos^2\frac{x}{x^2+1} = a^x + a^{-x}$ ku $0 < a \neq 1$.

**ZGJIDHJE**

$1+\cos\frac{2x}{x^2+1} = a^x + a^{-x}$ ose $\cos\frac{2x}{x^2+1} = a^x + a^{-x} - 1$.Ekuacioni ka zgjidhje kur $a^x + a^{-x} - 1 \leq 1$ ose $(a^x - 1)^2 \leq 0$ .pra $a^x = 1$; x=0.

**Shënim:**

Çdo pyetje vlerësohet me 10 pikë

REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

# OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

**Viti mësimor 2014-2015** **Faza e tretë** **Klasa 12**

**Olimpiada fillon në orën 10.00 dhe mbaron në orën 13.00.**

**1.** Jepet funksioni $f(x) = x^3 + x$ dhe $g(x)$ është funksioni i anasjelltë i tij.Të gjënden pikat e prerjes së dy grafikëve të funksioneve.

**ZGJIDHJE**

Funksioni f(x) është rritës sepse derivati i tij është pozitiv për çdo x.Kështu që funksioni i anasjelltë do të jetë $x=y^3+y$. pra dotë zgjidhim $\begin{cases} y = x^3 + x \\ x = y^3 + y \end{cases}$. Duke zbritur anë për anë del $(x-y)(x^2-xy+y^2+2)$ . që këtu x=y ose $x^2-xy+y^2+2=0$.
$x^2-xy+y^2+2=0$ është i njëvlefshëm me $(x-0,5y)^2+0,75y^2+2=0$, icily nuk ka zgjidhje.Duket se zgjidhja e vetme është x=y=0.

**2.** Të gjëndet vëndi gjeometrik i pikave M të planit që plotësojnë kushtin AM= 2MB( pikat A dhe B janë dy pika fikse të planit).

**ZGJIDHJE**

Shënojmë AB=2a (a>0). Zgjedhim si systemin e boshteve koordinativë: OX drejtëza AB dhe OY pingulen me të në mezin e segmentit AB.Atëhere kemi M(x;y); A(-a;0) dhe B(a;0).Duke shprehur AM dhe MB si gjatësi dhe duke shfrytëzuar kushtin dotë dalë $(x-\frac{5}{3}a)^2 + y^2 = \frac{16}{9}a^2$.

**3.** Jepet një katërfaqësh . Të vërtetohet se me tri brinjët që dalin nga të paktën një kulm i katërfaqëshit formohet një trekëndësh

**ZGJIDHJE**

Shënojmë SABCD katërfaqëshin.Supozojmë që SA është brinja më e madhe e tij. Në trekëndëshin SAC kemi SA<SC+AC. Në trekëndëshin SAB kemi
SA< SB+AB .Duke mbledhur anë për anë kemi 2SA< (SB+SC) +(AC+AB). SA dotë jetë më e madhe se njëra prej shumave. Pra me tre brinjë që dalin nga i njëjti kulm formohet trekëndësh.

**4.** Jepet trapezi dybrinjinjishëm me bazë të madhe a dhe kënd të ngushtë $60^o$, i cili është jashtëshkruar një rrethi. Të vërtetohet se perimetri i tij është $\frac{8}{3}$ a.

**ZGJIDHJE**

Shënojmë me x;y;z dhe t segmentët e tangenteve me rrethin .Kemi x+y=a;

z+t = $\frac{a}{3}$ .Perimetri del $\frac{8}{3}$ a.

**5**.Të gjenden të gjithë numrat pozitivë $x_i$ të tillë që plotësojnë kushtet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots\dots + x_n = 3 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots\dots + \frac{1}{x_n} = 3 \end{cases}$$

**ZGJIDHJE**

Duke mbledhur anë për anë kemi $x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2} + \dots\dots + x_n + \frac{1}{x_n} = 6$ ose

$x_1 + \frac{1}{x_1} - 2 + x_2 + \frac{1}{x_2} - 2 + \dots\dots + x_n + \frac{1}{x_n} - 2 = 6 - 2n$ ose

$(\frac{x_1 - 1}{\sqrt{x_1}})^2 + \dots\dots + (\frac{x_n - 1}{\sqrt{x_n}})^2 = 2(3 - n)$, icili vërtetohet për n$\leq$3. Për n=1 nuk ka zgjidhje ;për n=2 $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ; për n=3 $x_1$=1 $x_2$=1 $x_3$=1.

**Shënim:**

Çdo pyetje vlerësohet me 10 pikë.